



**Appunti di**  
**Controlli e regolazione**  
**automatica**

# INTRODUZIONE

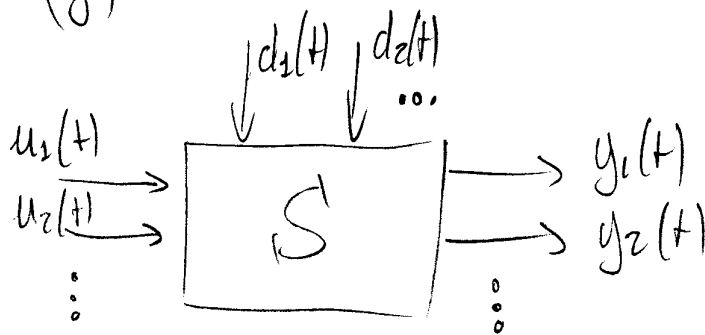
①

## - SISTEMI DINAMICI

- Un sistema dinamico è una rappresentazione idealizzata di un sistema reale, in cui è possibile individuare diversi tipi di variabili funzioni del tempo

• ingressi  $\left\{ \begin{array}{l} \text{variabili manipolabili (u)} \\ \text{disturbi (d)} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{cause}$

• uscite (y)  $\Leftrightarrow \text{effetti}$



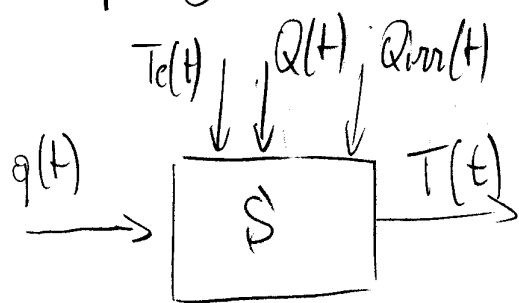
- L'andamento delle variabili d'uscita dipende da quello delle variabili d'ingresso; il legame è dinamico, nel senso che il valore di  $y$  in un certo istante  $T$  non dipende solo dal valore di  $u$  e  $d$  in quell'istante, ma anche dalla loro storia passata (il sistema ha "inerzia")

- Le variabili manipolabili possono essere modificate a piacere, mentre l'andamento dei disturbi è di origine esogene, quindi non modificabile

# INTRODUZIONE

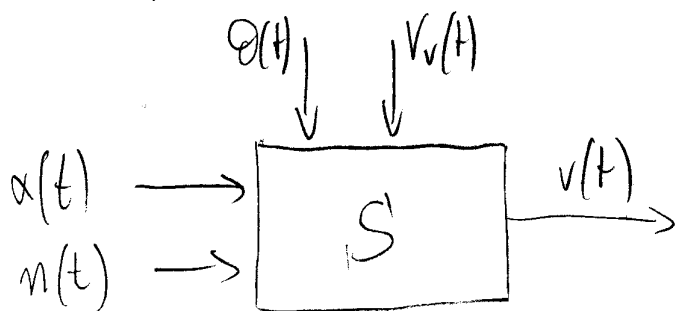
(2)

- Esempio (1) Dinamica della temperatura in un locale



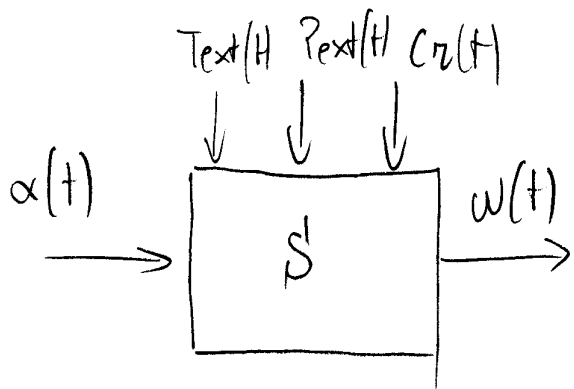
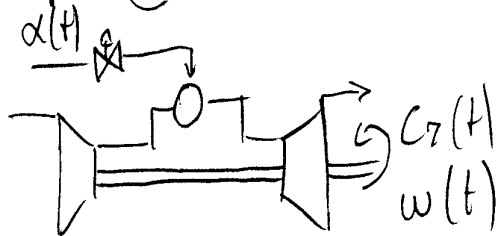
$q(t)$ : portata acqua calda termoconvettori  
 $T_e(t)$ : temperatura esterna  
 $Q(t)$ : potenza termica dissipata dagli occupanti  
 $Q_{irr}(t)$ : potenza termica irraggiata sul locale  
 $T(t)$ : temperatura del locale

- Esempio (2) Dinamica longitudinale di un autoveicolo



$\alpha(t)$ : angolo farfalla carburatore  
 $n(t)$ : # marcia inserita  
 $Q(t)$ : pendenza della strada  
 $V_v(t)$ : velocità del vento  
 $v(t)$ : velocità del veicolo

- Esempio (3) Generatore turbogas



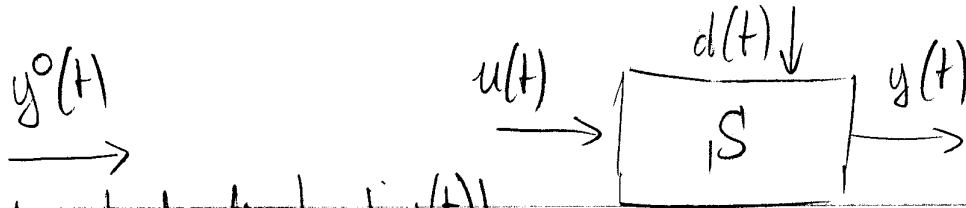
$\alpha(t)$ : apertura valvola combustibile  
 $T_{ext}(t)$ : temp. e press. atmosferiche  
 $P_{ext}(t)$   
 $C_z(t)$ : coppia resistente  
 $\omega(t)$ : velocità angolare albero motore

# INTRODUZIONE

3

## - PROBLEMA DI CONTROLLO

- Si supponga di avere un sistema dinamico, e di avere dei "desideri" sull'andamento delle variabili di uscita



(andamento desiderato di  $y(t)$ )  
(o riferimento o setpoint) ( $y^o, y, u, d$  possono essere  $\begin{cases} \text{scalari} \\ \text{vettori} \end{cases}$ )

## - Problema di controllo:

- determinare l'andamento delle variabili di controllo  $u(t)$
- in modo che  $y(t)$  sia prossimo a  $y^o(t)$

nonostante

- l'incertezza sull'andamento dei disturbi  $d(t)$
- l'incertezza sul comportamento del sistema  $S$

- Il problema di controllo può essere risolto da un operatore umano: controllo manuale (x es. automobilista)  
oppure da un sistema automatico (sistema di controllo o regolatore) (x es. termostato)

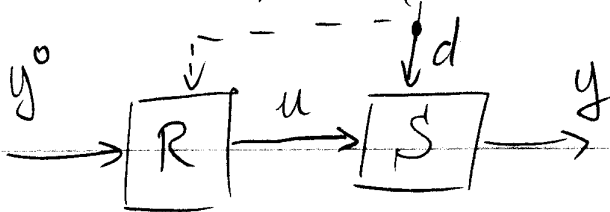
# INTRODUZIONE

(4)

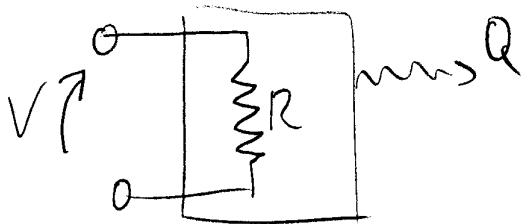
## - TIPOLOGIE DI SISTEMA DI CONTROLLO

- Si possono identificare due approcci complementari alla concezione di un sistema di controllo automatico

### (A) Controllo in anello aperto (o feed-forward)



- In base alla conoscenza del funzionamento del sistema  $S$ , del valore del riferimento  $y^0$ , ed eventualmente di una misura del disturbo  $d$ , il regolatore  $R$  decide l'andamento della variabile di controllo  $u$
- Questo schema è adatto a situazioni di incertezza ridotta, sia sul funzionamento di  $S$  che sull'effetto dei disturbi  $d$
- Esempio: termosifone elettrico

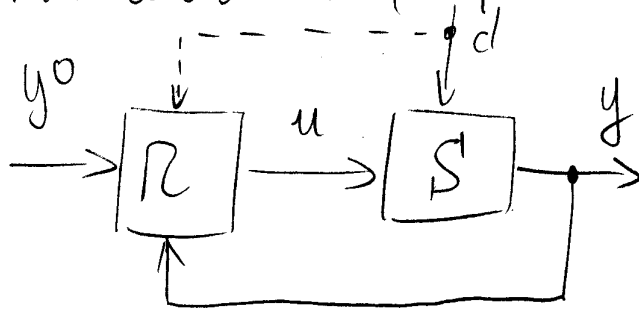


Una volta che il termosifone si è scaldato, per il 1° principio della termodinamica (su cui non c'è incertezza)  $Q = \frac{V^2}{R}$

Se  $y = Q$ , allora basta porre  $u = \frac{V^2}{y^0}$   
 $u = R$

- In condizioni di elevata incertezza, lo schema in anello aperto non è in grado di garantire che  $y(t) \approx y^o(t)$
- Esempio: regolazione della temperatura in un locale: poiché il coefficiente di scambio termico con l'esterno non è noto con precisione (e può dipendere dal vento), ed è difficile misurare le potenze termiche irraggiate e dissipate, sarà difficile riuscire a stabilire il valore adeguato di  $u(t)$

### (B) Controllo in anello chiuso (o feed-back)



- La variabile di controllo  $u$  viene determinata in base al riferimento  $y^o$ , al valore della variabile controllata  $y$  ed eventualmente alla misura del disturbo
- La possibilità di confrontare direttamente  $y^o$  e  $y$  riduce gli effetti negativi dell'incertezza
- Difficoltà principale: la dinamica di  $S$  introduce un ritardo tra le variazioni di  $u$  e quelle di  $y$  che può portare all'instabilità del sistema

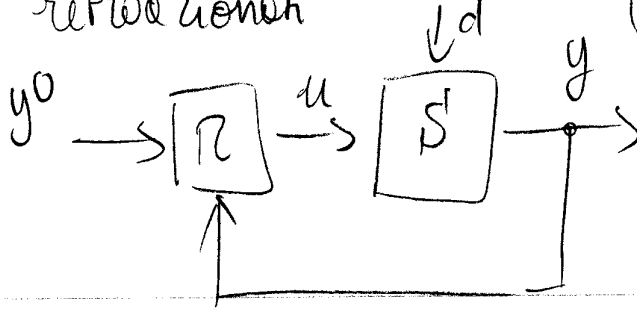
- Esempio (qualitativo) sia  $S$  una comune doccia domestica  
 $u$  è la posizione del miscelatore caldo/freddo e  $y$  la temperatura dell'acqua che esce dalla doccia. Le variazioni di  $u$  si ripercuotono su  $y$  con un certo ritardo, dovuto alle inerzie termiche e al tempo di trasporto nelle tubazioni.
- Se l'acqua è troppo fredda, si comincerà a muovere  $u$  verso la posizione "caldo"; quando finalmente l'acqua comincia a scaldarsi essa supererà presto la temperatura desiderata; si tenderà quindi a tornare sul "freddo"
- È facile capire come una azione di controllo "nervosa" può portare ad instabilità (oscillazioni permanenti o, peggio, di ampiezza crescente)

### - Riassumendo:

- C. in anello aperto: buone prestazioni solo in assenza di incertezza significativa (su  $S$  e  $sud$ )
- C. in anello chiuso: buone prestazioni anche in presenza di incertezza significativa  
 rischio di instabilità se il sistema ha una risposta "lenta"

## - CONTENUTI DEL CORSO

- Parte I: studio di semplici sistemi di controllo retroazionati (1 sola variabile controllata,



- Verranno introdotte metodologie per l'analisi dinamica dei sistemi da controllare
- Successivamente si tratteranno alcune metodologie per il progetto del regolatore R
- L'obiettivo è di far comprendere i concetti di base del controllo e quali ne sono gli aspetti critici, utilizzando strumenti matematici formali e rigorosi
- Parte II: architetture di sistemi di controllo complessi
  - Basandosi sui "fondamentali" illustrati nella I<sup>a</sup> parte del corso, verranno illustrate con un taglio più descrittivo la struttura e le caratteristiche dei sistemi di controllo 'industriali' di complessità reale, con particolare riferimento ad applicazioni nel campo energetico e termotecnico



# SISTEMI DINAMICI

①

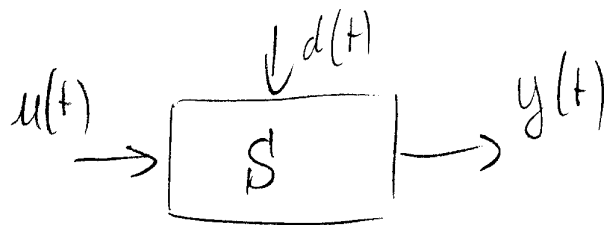
## - MODELLI DI SISTEMI DINAMICI

- Dato un sistema dinamico  $S$ , un modello  $M_S$  di  $S$  è un altro sistema dinamico che ne riproduce in modo approssimato il comportamento, limitatamente ad alcuni aspetti di interesse

- È quindi possibile fare "esperimenti" su  $M_S$  invece che su  $S$ , ottenendo risultati simili a quelli che si otterrebbero da  $S$

- Modelli  $\left\{ \begin{array}{l} \text{fisici (es modelli in scala)} \\ \text{matematici (equazioni, algoritmi, regole)} \end{array} \right.$

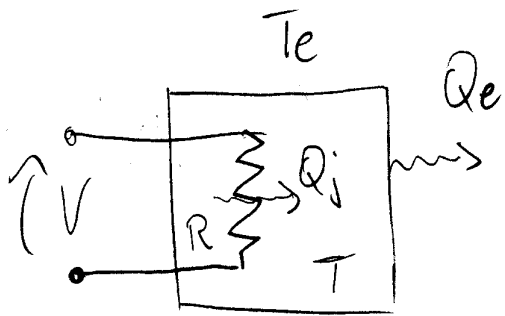
- Nell'ambito di questo corso ci concentreremo su modelli matematici



- Ipotezzando che  $u(t), d(t), y(t)$  sono funzioni di  $t \in \mathbb{R}$  lo strumento base per descrivere le relazioni tra  $u, d, y$  sono le equazioni differenziali, ordinarie o a derivate parziali

- Ne illustriamo alcuni esempi che usiamo poi nel seguito per esemplificare metodi e concetti generali. Ci concentreremo in particolare sul campo termo-idraulico, non trascurando però altri ambiti applicativi

- ESEMPIO ① Termosifone elettrico



• Hp semplificative:

- $T$  uniforme nella massa metallica del termosifone
- coeff. di scambio convettivo costante

- Conservazione energia:  $\frac{dE}{dt} = Q_j - Q_e$

$$E = cMT ; Q_j = \frac{V^2}{R} ; Q_e = KS(T - T_e)$$

$$cM\dot{T} = Q_j - KS(T - T_e)$$

- Introduciamo il concetto di variabile di stato  $x(t)$ : sono variabili di stato le variabili che compaiono sotto segno di derivata nelle equazioni del sistema

$x = T$  var. di stato

$u = Q_j$  var. manipolabile d'ingresso

$d = T_e$  disturbo

$y_1 = T$   
 $y_2 = Q_e$  } var. d'uscita

# SISTEMI DINAMICI

(3)

- Le equazioni del sistema si possono riscrivere come

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = -\frac{K_S}{cM} x(t) + \frac{1}{cM} u(t) + \frac{K_S}{cM} d(t) \\ y_1(t) = x(t) \\ y_2(t) = K_c S (x(t) - d(t)) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{eq. di stato} \\ \text{(differenziale)} \\ \text{eq. di uscita (algebriche)} \end{array}$$

- Questo modello permette di studiare l'evoluzione dinamica del sistema: noti

- il valore iniziale di  $x$ ,  $x(t_0) = x_0$

- l'andamento degli ingressi  $u(t)$ ,  $d(t)$  per  $t \in t_0 \rightarrow t_f$

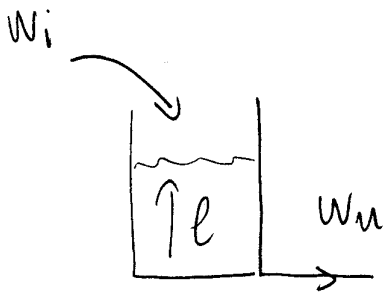
si può risolvere il problema di Cauchy sull'equazione differenziale, trovando  $x(t)$  per  $t \in t_0 \rightarrow t_f$ ; successivamente si sostituiscono gli andamenti di  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,  $d(t)$  nelle eq. d'uscita e si ricavano  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$

- È evidente che il valore di  $y(t)$  in un particolare istante  $t = \bar{t}$  non dipende solo da  $u(\bar{t})$ ,  $d(\bar{t})$ , ma anche dal loro andamento passato, "riassunto" dal valore della variabile di stato  $x(\bar{t})$

# SISTEMI DINAMICI

(4)

- Esempio (2) Serbatoio a portate impresse



• Hp semplificative

•  $\rho = \text{cost}$

• serbatoio cilindrico  
sezione  $A$

- Conservazione massa

$$\frac{dM}{dt} = w_i - w_u$$

$$M = \rho A l$$

$$\rho A \dot{l} = w_i - w_u$$

$$x = l$$

$$u = w_u$$

$$d = w_i$$

$$y = l$$

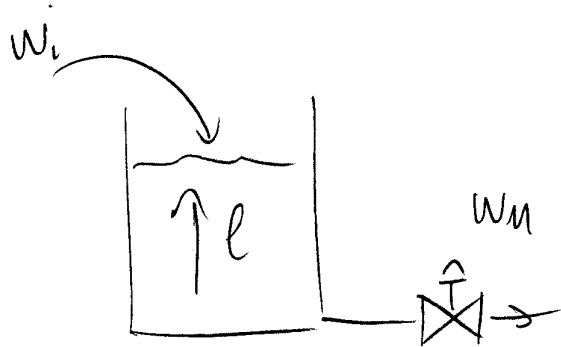
$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\rho A} (d - u) \\ y = x \end{cases}$$

# SISTEMI DINAMICI

(5)

- Esempio (3) Serbatoio con valvola



• Hp semplificative  
come (2)

- Conservazione massa

$$\frac{dV}{dt} = w_i - w_m$$

$$V = \rho A l$$

$$w_m = K A v \sqrt{y}$$

$$\rho A \dot{l} = w_i - K A v \sqrt{y}$$

$$x = l$$

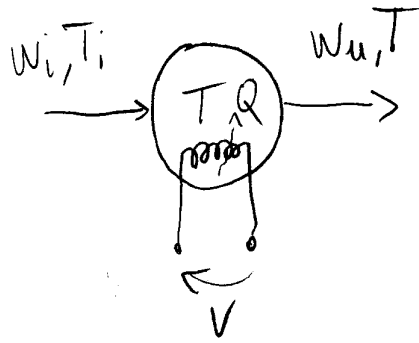
$$u = A v$$

$$d = w_i$$

$$y = l$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\rho A} (d - K u \sqrt{x}) \\ y = x \end{cases}$$

- Esempio (4) Scaldabagno



H<sub>p</sub> semplificative

- Densità  $\rho = \text{cost}$
- Calori specifici  $c_p \approx c_v = c = \text{cost}$
- Parete adiabatica e di capacità termica trascurabile
- Temperatura uniforme

• Cons. massa  $\frac{dM}{dt} = w_i - w_u$

• Cons. energia  $\frac{dE}{dt} = w_i h_i - w_u h_u + Q$

$M = \rho V = \text{cost}$

$h_i = c T_i$

$E = M e = M c T$

$h_u = c T$

$0 = w_i - w_u \Rightarrow w_i = w_u = w$

$M c \dot{T} = w c T_i - w c T + Q$

$x = T$

$u = Q$

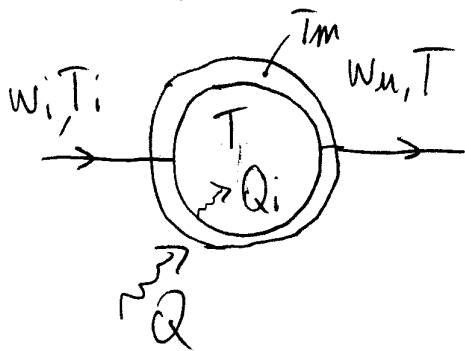
$d_1 = w$

$d_2 = T_i$

$y = T$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{M} d_1 d_2 - \frac{1}{M} x d_1 + \frac{1}{M c} u \\ y = x \end{cases}$$

- Esempio (5) Caldoia



• Hp semplificative

- Le stesse del modello (4), salvo che ora la capacità termica della parete non è trascurabile
- Flusso termico  $Q$  applicato sulla parete (esternamente)
- Temperature uniformi
- Coeff. convettivo costante

• Cons massa  $\Rightarrow w_i = w_u = w$

• Cons. energia fluido

$$\frac{dE}{dt} = wh_i - wh_u + Q_i$$

• Cons energia metallo

$$\frac{dE_m}{dt} = Q - Q_i$$

$$\rho c \dot{T} = w c T_i - w c T + K_c S (T_m - T)$$

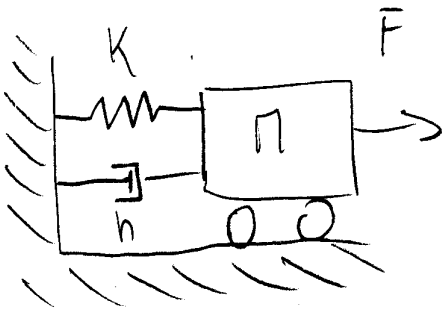
$$\rho_m c_m \dot{T}_m = Q - K_c S (T_m - T)$$

$$E = \rho c T \quad E_m = \rho_m c_m T_m$$

$$Q_i = K_c S (T_m - T)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= T \\ x_2 &= T_m \\ u &= Q \\ d_1 &= w \\ d_2 &= T_i \\ y &= T \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{\rho c} d_1 d_2 - \frac{1}{\rho c} x_1 d_1 + \frac{K_c S}{\rho c} (x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{\rho_m c_m} (u - K_c S (x_2 - x_1)) \\ y = x_1 \end{cases}$$

- Esempio ⑥ Sistema massa-molla



- H<sub>p</sub> semplificative
- piano orizzontale
- nessun attrito

- Conservazione quantità di moto

$$\frac{d}{dt}(mv) = F - Kp - hv$$

$$v = \dot{p}$$

$$\dot{p} = v$$

$$m\dot{v} = F - Kp - hv$$

$$x_1 = p$$

$$x_2 = v$$

$$u = F$$

$$y = p$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{m}x_1 - \frac{h}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \\ y = x_1 \end{cases}$$

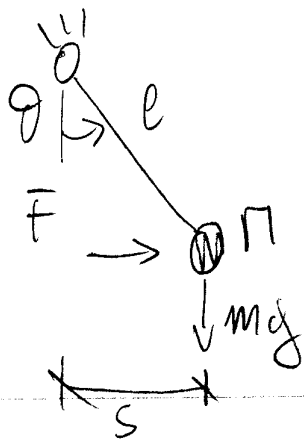
(oscillatore armonico)



# SISTEMI DINAMICI

(9)

- Esempio (7) Pendolo semplice



• Cons. momento angolare

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta}) = Fl \cos \theta - mgl \sin \theta - h \dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$x_1 = \theta$$

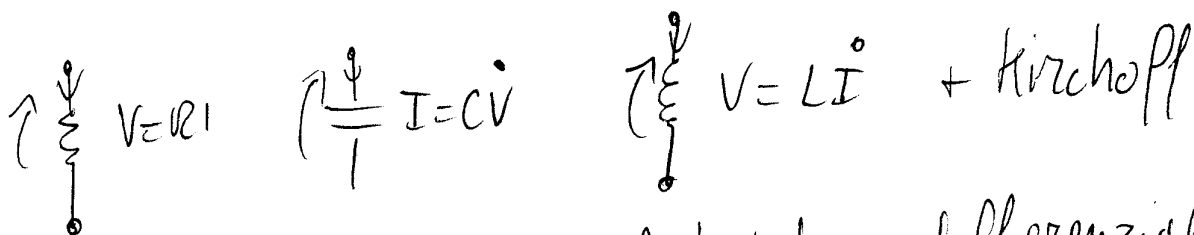
$$x_2 = \omega$$

$$u = F$$

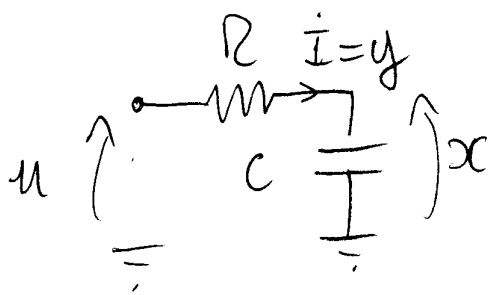
$$y = l \sin \theta$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{ml} u \cos x_1 - \frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{h}{ml^2} x_2 \\ y = l \sin x_1 \end{cases}$$

- Esempio (8) Reti elettriche



→ sistemi di equazioni algebriche e differenziali



$$RI + x = u \Rightarrow I = \frac{u-x}{R}$$

$$I = C \dot{x}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{u-x}{RC} \\ y = \frac{u-x}{R} \end{cases}$$

## - OSSERVAZIONE

• Molti modelli di sistemi dinamici in diversi ambiti della fisica possono essere descritti da equazioni del tipo

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{R}^n \quad \text{stati}$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

$$u \in \mathbb{R}^m \quad \text{ingressi}$$

$$y \in \mathbb{R}^p \quad \text{uscite}$$

- Spesso le equazioni differenziali scendono da equazioni del tipo

$$\frac{d}{dt} (\text{quantità accumulata}) = \sum \text{flussi}$$

in questi casi le variabili di stato sono legate all'accumulo di qualcosa (masso, energia, quantità di moto, carica elettrica, etc.)

# SISTEMI DINAMICI

(19)

## - SISTEMI A PARAMETRI DISTRIBUITI

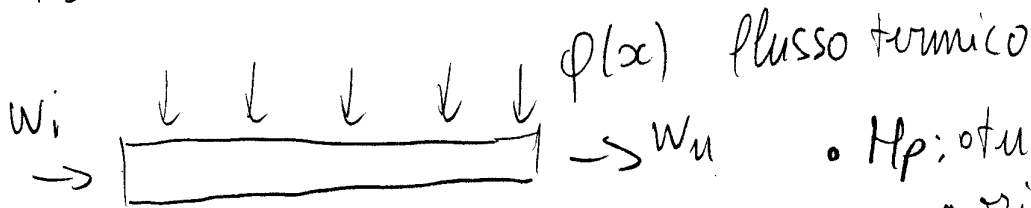
- Molti sistemi fisici sono descritti naturalmente da equazioni differenziali a derivate parziali: in questo caso le variabili di stato non sono più:

$$v(t) \quad \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$$

bensì  $v(x, t) \quad \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n \quad x \in \Omega$

- La trattazione generale è molto complessa; ci limitiamo ad un esempio soltanto

## - EQUAZIONE DI TRASPORTO DEL CALORE PER UN FLUIDO INCOMPRESSIBILE (MONODIMENSIONALE)



$\phi(x)$  flusso termico

•  $H_p$ : tubo rigido ( $A = \text{cost}$ )

• orizzontale

• senza attrito

•  $\rho = \text{cost}$

• trascur. diffusione

• perimetro:  $w$

•  $c_v \approx c_p \approx c \approx \text{cost}$

• Cons. massa  $\frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho A u) = 0$

• Cons. energia  $\frac{\partial}{\partial t} (\rho A e) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho A u h) = \phi \cdot w$

$$w = \rho A u$$

• Cons. massa  $0 = \frac{\partial w}{\partial x} \Rightarrow w(x,t) = w(t) = w_i = w_u = w$

• Cons. energia

$$\rho A c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + w c \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = q \cdot w$$

- In questo caso la variabile di stato è l'intero profilo di temperatura  $T(x,t)$   $x \in 0 \rightarrow L$

- la soluzione delle equazioni a derivate parziali è però in generale molto più difficile della soluzione delle equazioni a derivate ordinarie

# MOVIMENTO / STABILITÀ

①

## - MOVIMENTO

- Dati:
- un sistema dinamico  $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & (\text{eq. stato}) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) & (\text{eq. uscita}) \end{cases}$
  - l'andamento degli ingressi  $u(t) \quad t \in 0 \rightarrow t_f$
  - le condizioni iniziali  $x(0) = x_0$

- Movimento:
- soluzione  $x(t)$  del pb di Cauchy sulle equazioni di stato
  - soluzione  $y(t)$  delle equazioni d'uscita

## - EQUILIBRIO

- Particolare movimento in cui tutte le variabili restano costanti

$$x(t) = \bar{x}$$

$$u(t) = \bar{u}$$

$$y(t) = \bar{y}$$

- Condizioni di equilibrio:  $\dot{x}(t) = 0$

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$$

# MOVIMENTO / STABILITA'

(2)

- ESEMPIO: TERMOSONDINE

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{KS}{cM} x(t) + \frac{1}{cM} u_1(t) + \frac{KS}{cM} u_2(t) \\ y_1(t) = x(t) \\ y_2(t) = KS(x(t) - u_2(t)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= T \\ u_1 &= Q_j \\ u_2 &= T_{ext} \\ y_1 &= T \\ y_2 &= Q_c \end{aligned}$$

- Equilibrio

$$-\frac{KS}{cM} \bar{x} + \frac{1}{cM} \bar{u}_1 + \frac{KS}{cM} \bar{u}_2 = 0$$

$$\bar{y}_1 = \bar{x}_1$$

$$\bar{y}_2 = KS(\bar{x} - \bar{u}_2)$$

$\Rightarrow$

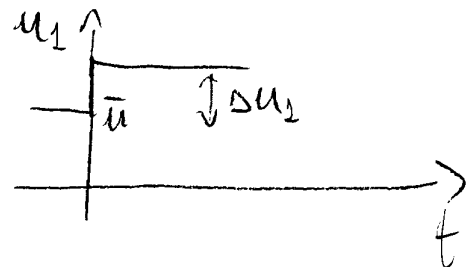
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\bar{u}_1}{KS} + \bar{u}_2 \\ \bar{y}_1 &= \frac{\bar{u}_1}{KS} + \bar{u}_2 \\ \bar{y}_2 &= \bar{u}_1 \end{aligned}$$

- Movimento: supponiamo che il sistema sia inizialmente all'equilibrio;

$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{x} \\ u_1(t) &= \bar{u}_1 \\ u_2(t) &= \bar{u}_2 \end{aligned} \quad t < 0$$

supponiamo ora di variare  $u_1$  bruscamente in  $t=0$

$$\begin{aligned} x(0) &= \bar{x} \\ u_1(t) &= \bar{u}_1 + \Delta u \\ u_2(t) &= \bar{u}_2 \end{aligned} \quad t \geq 0$$

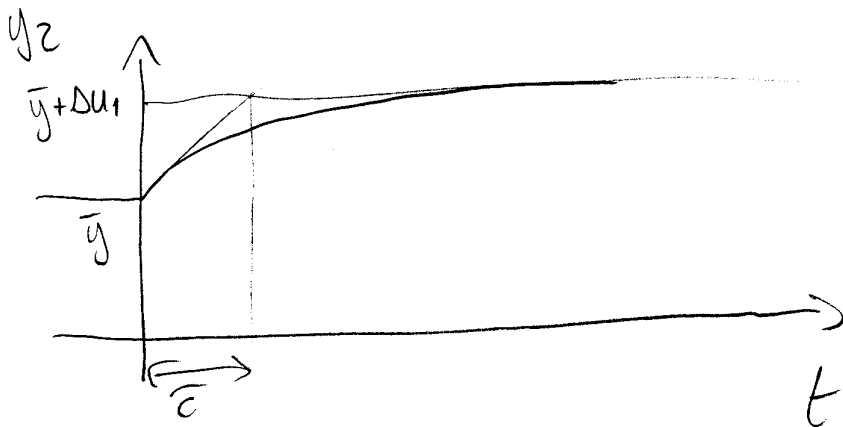
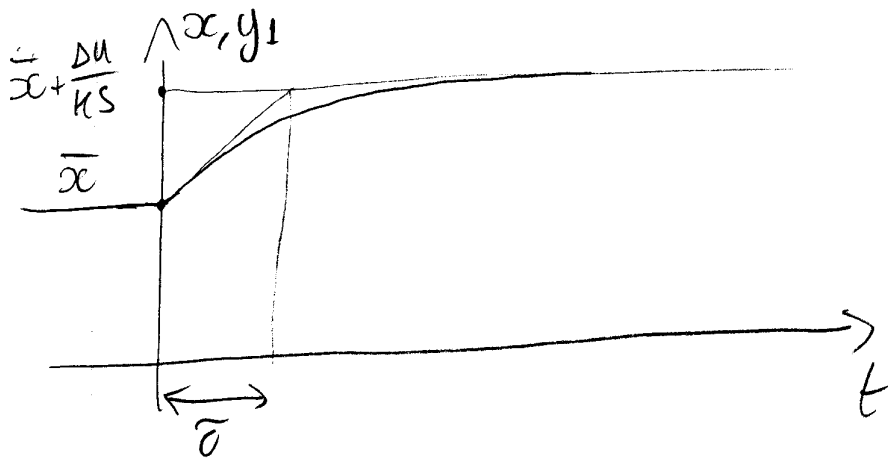


# MOVIMENTO/STABILITA'

(3)

- la soluzione del pb. di Cauchy vale

$$\begin{cases} x(t) = \bar{x} + \frac{\Delta u_1}{KS} (1 - e^{-t/\tilde{\tau}}) \\ y_1(t) = x(t) \\ y_2(t) = \bar{y}_2 + \Delta u_1 (1 - e^{-t/\tilde{\tau}}) \end{cases} \quad \tilde{\tau} = \frac{cM}{KS}$$



- La rapidità della risposta è determinata dal parametro  $\tilde{\tau}$ , ed è proporzionale al coefficiente di scambio e inversamente proporzionale all'inerzia Termica del termosifone

# MOVIMENTO / STABILITÀ

(4)

- MOVIMENTO IN SISTEMI LINEARI E NON LINEARI

- Il movimento di un generico sistema dinamico dipende in modo complesso da  $x(0)$  e  $u(t)$

- Se il sistema dinamico è lineare, il legame si semplifica, e gode della proprietà di sovrapposizione degli effetti

- Sistema dinamico lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} & n & m \\ n & \boxed{A} & \boxed{B} \\ p & \boxed{C} & \boxed{D} \end{matrix}$$

$\dot{x}(t)$  e  $y(t)$  sono combinazioni lineari di  $x(t)$  e  $u(t)$

- Il movimento di un sistema lineare può essere espresso mediante la formula di Lagrange

$$x(t) = \underbrace{e^{At} x(0)}_{\text{moto libero}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}_{\text{moto forzato}}$$

$$\left[ e^{At} \triangleq \sum_0^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \right]$$



# MOVIMENTO/STABILITÀ

(5)

- Sovrapposizione degli effetti I: il movimento di un sistema lineare è la somma di una parte dipendente dalle sole condizioni iniziali (moto libero) e di una parte dipendente dal solo ingresso (moto forzato)
- Sovrapposizione degli effetti II: per un sistema lineare, se  
 $x_1(t)$  è il moto forzato causato da  $u_1(t)$   
 $x_2(t)$  " " " "  $u_2(t)$   
allora il moto forzato causato da  $u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$   
vale  $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$
- Queste proprietà semplificano enormemente l'analisi dei sistemi dinamici lineari rispetto al caso nonlineare generale
- Per questo motivo può essere utile approssimare la dinamica di un sistema non-lineare con una sua versione linearizzata

# MOVIMENTO / STABILITÀ

(6)

- MOVIMENTO NELL'INTORNO DI UN EQUILIBRIO  
(LINEARIZZAZIONE)

- Consideriamo il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ \dot{y} = g(x, u) \end{cases}$$

ed un suo particolare stato di equilibrio  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$

tale che

$$\begin{cases} 0 = f(\bar{x}, \bar{u}) \\ 0 = g(\bar{x}, \bar{u}) \end{cases}$$

- Sviluppiamo in serie di Taylor le equazioni del sistema nell'intorno dell'equilibrio

$$x(t) = \bar{x} + \Delta x(t)$$

$$y(t) = \bar{y} + \Delta y(t)$$

$$u(t) = \bar{u} + \Delta u(t)$$

Jacobiani di  $f$  rispetto a  $x$  ed  $u$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} + \Delta \dot{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \Delta u + O(\Delta x^2, \Delta u^2) \\ \dot{\bar{y}} + \Delta \dot{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \Delta u + O(\Delta x^2, \Delta u^2) \end{cases}$$

- Se tronchiamo la serie ai termini del 1° ordine, otteniamo

$$\Delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \Delta u$$

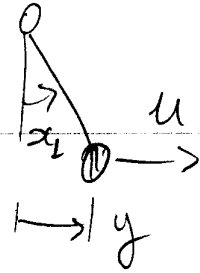
$$\Delta \dot{y} = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \Delta u$$

# MOVIMENTO / STABILITÀ

(7)

- Gli Jacobiani sono calcolati nel punto di equilibrio, e sono quindi delle costanti: il sistema approssimato è lineare
- Di fatto abbiamo approssimato  $f$  e  $g$  con i loro differenziali (sistema tangente)

- ESEMPIO: PENDOLO

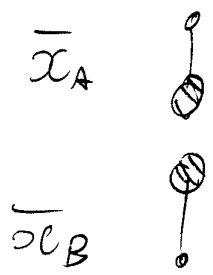


$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{me} u \cos \alpha_1 - \frac{g}{e} \sin \alpha_1 - \frac{h}{me^2} x_2 \\ y = l \sin \alpha_1 \end{cases}$$

- Equilibri per  $\bar{u} = 0$

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = \frac{1}{me} \bar{u} \cos \bar{\alpha}_1 - \frac{g}{e} \sin \bar{\alpha}_1 - \frac{h}{me^2} \bar{x}_2 \\ \bar{y} = l \sin \bar{\alpha}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{\alpha}_1 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \\ \bar{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{2 possibili stati di equilibrio}$$



- Equazioni linearizzate

$$\begin{cases} \dot{\Delta x}_1 = \Delta x_2 \\ \dot{\Delta x}_2 = \left( -\frac{1}{ml} \bar{u} \sin \bar{\alpha}_1 - \frac{g}{e} \cos \bar{\alpha}_1 \right) \Delta x_1 - \frac{h}{ml^2} \Delta x_2 + \frac{\cos \bar{\alpha}_1}{ml} \Delta u \\ \Delta y = l \cos \bar{\alpha}_1 \Delta x_1 \end{cases}$$

- Attorno ad  $\bar{\alpha}_A$

$$\begin{cases} \dot{\Delta x}_1 = \Delta x_2 \\ \dot{\Delta x}_2 = -\frac{g}{e} \Delta x_1 - \frac{h}{ml^2} \Delta x_2 + \frac{1}{ml} \Delta u \\ \Delta y = l \Delta x_1 \end{cases}$$

formalmente  
analoghe al  
sistema massa-molla!

- Attorno ad  $\bar{\alpha}_B$

$$\begin{cases} \dot{\Delta x}_1 = \Delta x_2 \\ \dot{\Delta x}_2 = +\frac{g}{e} \Delta x_1 - \frac{h}{ml^2} \Delta x_2 - \frac{1}{ml} \Delta u \\ \Delta y = -l \Delta x_1 \end{cases}$$

- Nell'intorno dell'equilibrio (quindi per movimenti di piccola ampiezza) le equazioni sono formalmente identiche a quelle di un sistema massa-molla dove

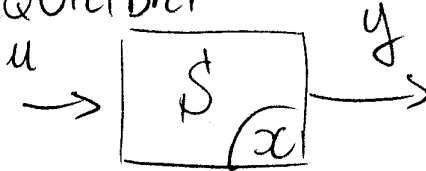
$$\frac{K}{m} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{g}{e} \text{ pendolo in giù (forza di richiamo)} \\ -\frac{g}{e} \text{ pendolo in su (forza repulsiva)} \end{cases}$$

massa-molla

# MOVIMENTO / STABILITÀ

(9)

## - STABILITÀ DEGLI EQUILIBRI

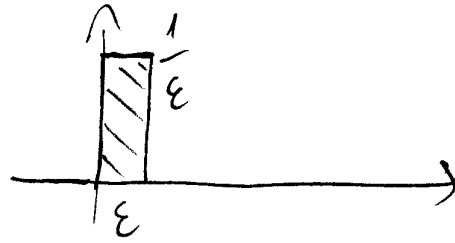


- Consideriamo un particolare equilibrio del sistema  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$ . Supponiamo ora di perturbare questo equilibrio: se il sistema ritorna verso l'equilibrio iniziale, o comunque non se ne allontana troppo, diremo che l'equilibrio è stabile; viceversa che è instabile
- Si possono dare due definizioni diverse di stabilità
  - 1) Stabilità interna: perturbiamo  $x(0)$  tenendo costante  $u(t)$  e vediamo l'andamento di  $x(t)$
  - 2) Stabilità esterna: perturbiamo  $u(t)$  e vediamo l'andamento di  $y(t)$
- In molti casi le due definizioni sono equivalenti, in altri no (per ragioni abbastanza sottili) - nel seguito ci concentriamo sulla definizione di s. esterna

- IMPULSO O DELTA DI DIRAC

- Impulso rettangolare

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = 1$$

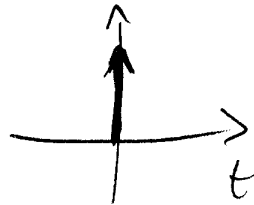
- Impulso o delta di Dirac

- Si può definire intuitivamente come il limite di  $\delta_\varepsilon(t)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$

- Si tratta di una funzione generalizzata o distribuzione

- Proprietà:

$$\bullet \delta(t) = 0 \quad t \neq 0$$



$$\bullet \int_{-a}^{+b} \delta(t) dt = 1 \quad \forall a > 0 \quad b > 0$$

- È utile per modellizzare fenomeni fisici di breve durata di cui non interessa l'andamento preciso ma solo l'integrale si pensi alle forze di contatto nei problemi di urto

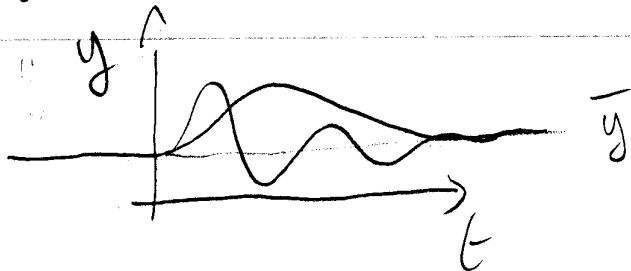
$$m(v_2 - v_1) = \int_{\text{prima}}^{\text{dopo}} F(t) dt$$

## - STABILITÀ ESTERNA DI UN EQUILIBRIO

- Siano  $\bar{u}, \bar{y}$  valori di equilibrio del sistema

- Si applichi l'ingresso  $u(t) = \bar{u} + \varepsilon \cdot \delta(t)$

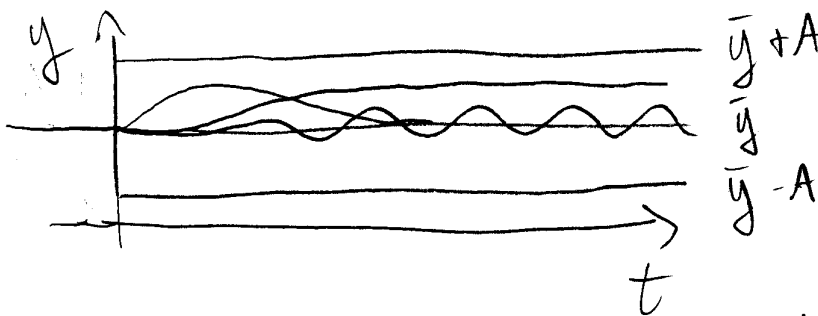
①  $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - \bar{y}) = 0 \Rightarrow$  Equilibrio asintoticamente stabile



②  $\forall A > 0 \exists \varepsilon > 0$  tale che

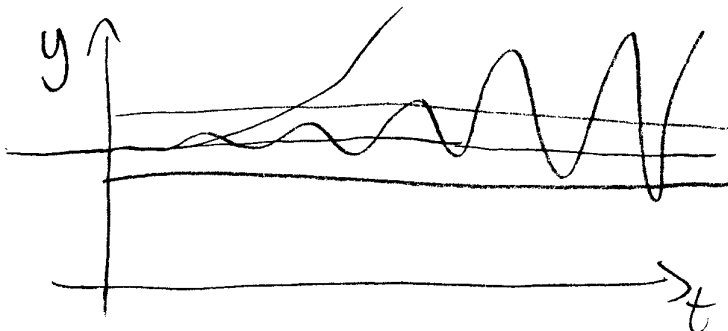
$\|y(t) - \bar{y}\| < A$

$\Rightarrow$  Equilibrio stabile



(se  $y(t)$  non tende a  $\bar{y}$  si dice semplicemente stabile)


③ Negli altri casi  $\Rightarrow$  Equilibrio instabile

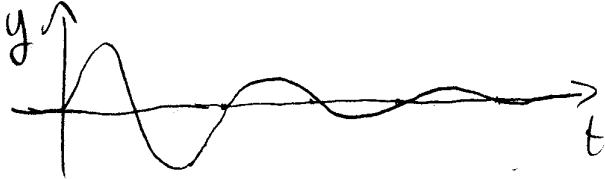



# MOVIMENTO / STABILITÀ

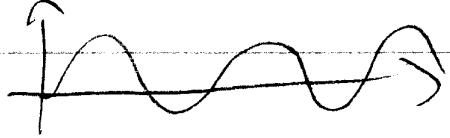
(12)


## - ESEMPI

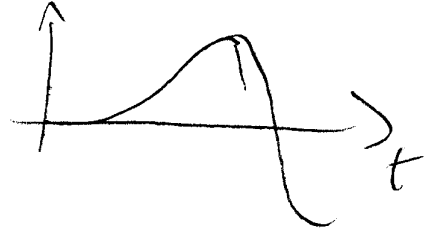
• Pendolo con attrito  
ingiù   $\Rightarrow$  asintoticamente stabile



• Pendolo senza attrito  
ingiù   $\Rightarrow$  semplicemente stabile



• Pendolo rovesciato  
in su   $\Rightarrow$  instabile



## - STABILITÀ NEI SISTEMI LINEARI

- Dato un sistema dinamico lineare  $S$ , si dimostra che tutti i suoi equilibri hanno identiche proprietà di stabilità

- Pertanto si parla impropriamente di stabilità del sistema e non del singolo equilibrio



## - ESERCIZI PROPOSTI

- Calcolare gli equilibri e le equazioni linearizzate dei sistemi

(3) Serbatoio con valvola

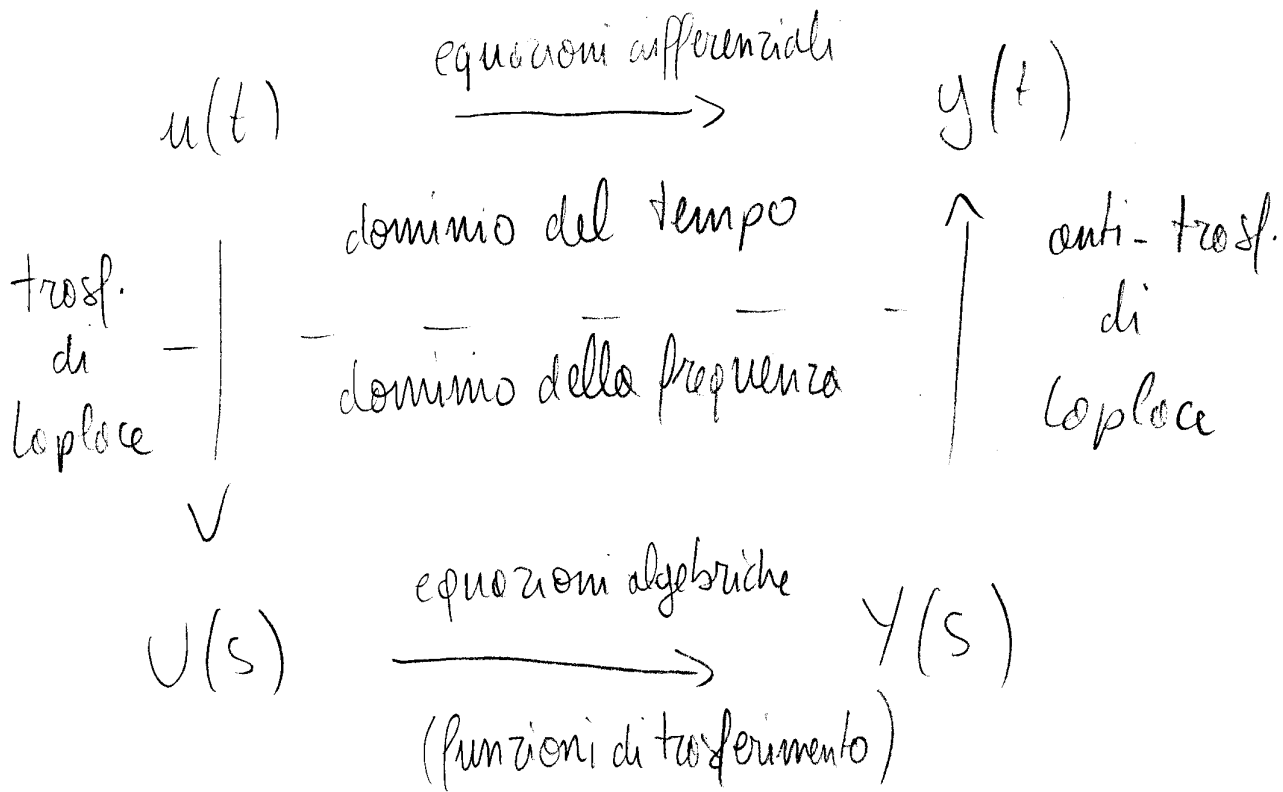
(4) Scaldabagno

(5) Caldaia

---

## - INTRODUZIONE

- L'integrazione delle equazioni di stato in forma analitica è in generale un problema difficile o impossibile da risolvere; si ricorre tipicamente a metodi numerici (Eulero, Runge-Kutta, etc.)
- Per quanto riguarda i sistemi lineari, il problema si può risolvere in modo semplice e generale mediante l'impiego delle trasformate di Laplace. Si ricorda che anche sistemi non lineari possono essere approssimati da sistemi lineari, e quindi analizzati mediante TdL.
- Lo schema di soluzione è il seguente



- Si può passare da  $u(t)$  a  $y(t)$  passando per il dominio della frequenza

## - TRASFORMATA DI LAPLACE

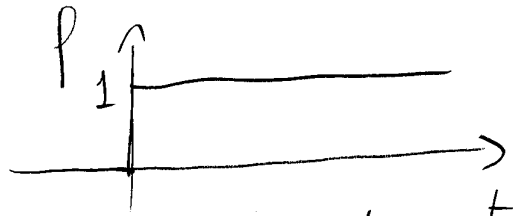
- Definizione: data  $f(t)$  definita per  $t \in 0^+ \rightarrow +\infty$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad \underline{\text{se } G}$$

- L'integrale converge ad una funzione analitica solo per certi valori di  $s$ , poi si estende  $F(s)$  a tutto il piano di Gauss

## - ESEMPIO 1

$$f(t) = \text{sca}(t)$$



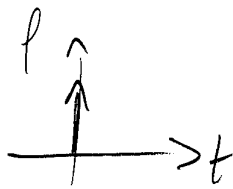
$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} = \left[ s = \alpha + j\omega \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t}}{-s} - \frac{e^0}{-s} = \left[ e^{-j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \right]$$

$$= \frac{1}{s} \quad \text{se } \alpha > 0 \quad ; \quad \text{si estende a tutto il piano}$$

## - ESEMPIO 2

$$f(t) = \delta(t)$$



$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t) dt = e^{-\alpha t} \cdot 1 = 1$$

- PROPRIETA' DELLA TdL

Tempo  $\xrightarrow{\mathcal{L}}$

Trasformate

$f(t)$

$F(s)$

$g(t)$

$G(s)$

$\alpha f(t) + \beta g(t)$

$\alpha F(s) + \beta G(s)$  linearità

$e^{\alpha t} f(t)$

$F(s - \alpha)$  Traslazione in freq

$f(t - \tau)$

$e^{-s\tau} F(s)$  Traslazione nel tempo

$t \cdot f(t)$

$-\frac{dF(s)}{ds}$  Derivazione in freq

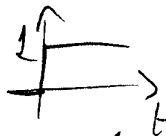
$\frac{df(t)}{dt}$

$sF(s) - f(0^+)$  Derivazione nel tempo

Es

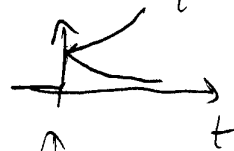
$\text{sca}(t)$

$\frac{1}{s}$



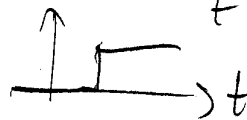
$e^{\alpha t} \text{sca}(t)$

$\frac{1}{s - \alpha}$



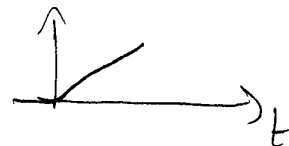
$\text{sca}(t - \tau)$

$e^{-s\tau} \frac{1}{s}$



$\text{rom}(t) = t \text{sca}(t)$

$-\frac{d}{ds} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$



$\frac{d}{dt} \text{rom}(t) = \text{sca}(t)$

$s \frac{1}{s^2} - \text{rom}(0) = \frac{1}{s}$

NB

derivazione nel tempo

$\frac{d}{dt} \circ \xrightarrow{\mathcal{L}}$

$s \circ$

derivata

prodotto

$\rightarrow$  eq diff

eq algebriche!

- TRASFORMATE NOTEVOLI

| $f(t)$                         | $F(s)$                          |
|--------------------------------|---------------------------------|
| $\delta(t)$                    | 1                               |
| $\text{sca}(t)$                | $1/s$                           |
| $\text{ram}(t)$                | $1/s^2$                         |
| $e^{at} \text{sca}(t)$         | $\frac{1}{s-a}$                 |
| $\sin(\omega t) \text{sca}(t)$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ |
| $\cos(\omega t) \text{sca}(t)$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$      |

si trovano applicando la definizione o tramite le proprietà notevoli

- POLI E ZERI DI UNA TRASFORMATA

- Poli: valori (complessi) di  $s$  t.c.  $|F(s)| = \infty$
- Zeri: " " " " " "  $|F(s)| = 0$

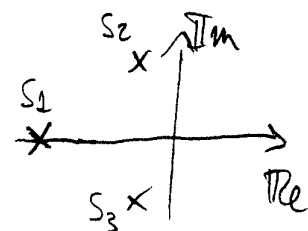
Nel caso di trasformate razionali  $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  ← polinomi in  $s$

- poli: radici del denominatore
- zeri: radici del numeratore

NB: teorema dell'algebra: nel campo complesso, un polinomio di grado  $n$  ha sempre  $n$  radici

Es:  $D(s) = s^3 + 4s^2 + 4s + 3 = (s+3)(s^2 + s + 1)$

$s_1 = -3$   
 $s_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$



## - FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

- Consideriamo un sistema dinamico lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \begin{cases} X(s) = \mathcal{L}[x(t)] \\ U(s) = \mathcal{L}[u(t)] \\ Y(s) = \mathcal{L}[y(t)] \end{cases}$$

- Trasformiamo le equazioni secondo Laplace

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \quad (1) \quad \begin{array}{l} \text{sistema di equazioni} \\ \text{algebriche nel dominio} \\ \text{della frequenza} \end{array}$$

- Soluzione

$$(sI - A)X = BU + x(0) \quad |sI - A| \neq 0 \text{ per } s \neq \text{autovalori di } A$$

$$X = (sI - A)^{-1}(BU + x(0))$$

$$Y = CX + DU = \underbrace{[C(sI - A)^{-1}B + D]}_{\uparrow \text{TdL moto forzato}} U(s) + \underbrace{C(sI - A)^{-1}}_{\uparrow \text{TdL moto libero}} x(0)$$

- Osservazione 1: Il metodo della trasformata di Laplace può essere usato per calcolare il movimento di un sistema lineare- Osservazione 2: Non è necessario impiegare le matrici per risolvere il sistema 1; si può procedere per sostituzioni

## F dT

(6)

- Se ci limitiamo al solo moto forzato ( $x(0)=0$ ) risulta

$$Y(s) = G(s) U(s)$$

con  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  funzione di trasferimento

- Nel caso molti ingressi / molte uscite,  $G(s)$  è una matrice  $p \times m$  di funzioni di  $s$

- Nel caso 1 ingresso, 1 uscita,  $G(s)$  è uno scalare  $\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

- Poiché  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ , si può interpretare  $G(s)$  come la trasformata della risposta ad impulso

$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1 \Rightarrow Y(s) = G(s) \cdot 1 = G(s)$$

$$\boxed{\mathcal{L}[y_{\delta(t)}] = G(s)}$$

- ESEMPIO 1: Termosifone

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{KS}{cM} x + \frac{1}{cM} u_1 + \frac{KS}{cM} u_2 \\ y_1 = x \\ y_2 = KS(x - u_2) \end{cases}$$

$F dT$ 

(7)

- Trasformiamo sec. Laplace con  $x(0) = 0$

$$sX = -\frac{KS}{c\tau} X + \frac{1}{c\tau} U_1 + \frac{KS}{c\tau} U_2 \quad \tilde{\tau} = \frac{c\tau}{KS}$$

$$\left(s + \frac{1}{\tilde{\tau}}\right) X = \frac{1}{c\tau} U_1 + \frac{1}{\tilde{\tau}} U_2$$

$$X = \frac{1}{KS} \frac{1}{1+s\tilde{\tau}} U_1 + \frac{1}{1+s\tilde{\tau}} U_2$$

$$Y_1 = X_1 = \underbrace{\frac{1}{KS} \frac{1}{1+s\tilde{\tau}}}_{G_{11}(s)} U_1 + \underbrace{\frac{1}{1+s\tilde{\tau}}}_{G_{12}(s)} U_2$$

$$Y_2 = KS (X - U_2) = \underbrace{\frac{1}{1+s\tilde{\tau}}}_{G_{21}(s)} U_1 - \underbrace{KS \frac{s\tilde{\tau}}{1+s\tilde{\tau}}}_{G_{22}(s)} U_2$$

$$\begin{matrix} (T) \\ (Q_c) \end{matrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{KS} \cdot \frac{1}{1+s\tilde{\tau}} & \frac{1}{1+s\tilde{\tau}} \\ \frac{1}{1+s\tilde{\tau}} & -KS \frac{s\tilde{\tau}}{1+s\tilde{\tau}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_j) \\ (T_e) \end{matrix}$$

↑  
 $G(s)$



- ESEMPIO 2: MASSA-MOLLA

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{h}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{h}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{h}{m} \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{h}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{h}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix}$$

$$C(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{h}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{h}{m} & 1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + hs + k}$$

- Provare a risolvere per sostituzione

# FDT

(9)

## - STRUTTURA FDT

- Dato un sistema dinamico lineare di ordine  $n$ , con  $m$  ingressi e  $p$  uscite

$$G(s) = C (sI - A)^{-1} B + D$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{|sI - A|} \cdot \begin{matrix} \text{matrice} \\ \text{complementi} \\ \text{algebraici} \end{matrix} = \frac{1}{\text{polinomio} \\ \text{grado } n} \cdot \left[ \begin{matrix} \text{matrice polinomi} \\ \text{grado } \leq n-1 \end{matrix} \right]$$

$C (sI - A)^{-1} B$  è una combinazione lineare degli elementi di

$(sI - A)^{-1} \rightarrow$  matrice di funzioni razionali

- Se ci limitiamo al caso 1-ingresso 1-uscita

$$C (sI - A)^{-1} B = \frac{\text{polinomio grado } \leq n-1}{\text{polinomio grado } n}$$

supponiamo per il momento che i due polinomi siano primi fra loro, cioè non abbiano radici in comune

- Def poli  $G(s)$ : valori di  $s \in \mathbb{C}$  per cui  $G(s) \rightarrow \infty \Rightarrow$  radici del denominatore
- Def zeri  $G(s)$ : valori di  $s \in \mathbb{C}$  per cui  $G(s) \rightarrow 0 \Rightarrow$  radici del numeratore

- Def  $\text{gr}_{\text{rel}}(G(s))$  grado relativo di  $G(s)$ :  
 $\text{grado denominatore} - \text{grado numeratore} =$   
 $= \# \text{ poli} - \# \text{ zeri}$

- Se  $\boxed{d=0} \Rightarrow \text{gr}(\zeta) > 0$  sistema strettamente proprio  
 $\# \text{poli} > \# \text{zeri}$   
 non c'è trasferimento diretto tra  $u$  e  $y$
- Se  $\boxed{d \neq 0} \Rightarrow \text{gr}(\zeta) = 0$  sistema proprio non strettamente  
 $\# \text{poli} = \# \text{zeri}$

• N.B. data  $G(s)$  con  $\text{gr}(\zeta) < 0$ , ossia  $\# \text{poli} < \# \text{zeri}$

∄ nessun sistema dinamico  $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

che lo ammetta come p.d.f.

Esempio  $G(s) = s$  (derivatore puro)

$$u(t) = \text{sca}(t) \Rightarrow y(t) = \delta(t)$$

- CANCELLAZIONI POLO-ZERO

- Dato un sistema di ordine  $n$

$$G_{ij}(s) = \frac{N_{ij}(s)}{|sI - A|}$$

$N_{ij}(s) \leftarrow$  polinomio grado  $\leq n$ ; radici?  
 $|sI - A| \leftarrow$  polinomio grado  $n$ ; radici = autovaleori di  $A$

- Se i due polinomi sono primi tra loro (cioè non hanno radici in comune) allora

- poli  $G_{ij}(s) \equiv$  autovalori  $A$
- $\#$  poli  $= n$

- Altimenti occorre semplificare i poli comuni; numeratore e denominatore avranno quindi un grado ridotto, e in particolare

$$\# \text{ poli} < n$$

- Questo fatto indica che tra l'ingresso  $j$ -esimo e l'uscita  $i$ -esima una parte della dinamica non è coinvolta / visibile

- Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \\ y = x_1 + x_2 \end{cases} \quad \begin{aligned} & \bullet n = 2 \quad (\text{ sistema II ordine}) \\ & \bullet G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \\ & \quad = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

- Un polo  $p = -1$ ; nessuno zero

$$\bullet A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} : \text{ autovalori di } A \text{ sono } \lambda = \begin{array}{l} -1 \text{ polo} \\ -2 \text{ non} \\ \text{visibile} \end{array}$$

la dinamica legata alla II<sup>a</sup> equazione non è coinvolta nel legame ingresso-uscita descritto da  $G(s)$

- Si hanno "dinamiche nascoste" in tutti i casi in cui l'ordine delle PdT è minore dell'ordine del sistema

- FORMA POLI-ZERI

- Si possono mettere in evidenza poli e zeri nello fdt
- Se ci sono coppie di poli/zeri complessi coniugati, si tengono insieme i polinomi di II° grado che li originano

$$G(s) = \beta \frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_j (s - p_j)} \cdot \frac{\prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}{\prod_j (s^2 + 2\xi_j \omega_{nj} s + \omega_{nj}^2)}$$

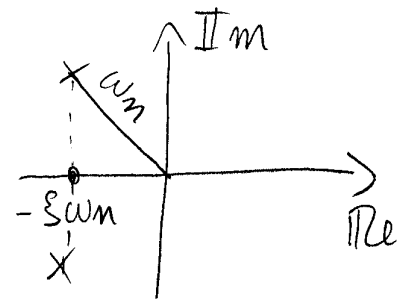
$\beta$ : costante di trasferimento

$z_i$ : zeri reali

$p_j$ : poli reali

$\omega_{ni}, \xi_i$ : pulsazione naturale e smorzamento zeri cplx

$\omega_{nj}, \xi_j$ : " " " " poli "



- FORMA GUADAGNO / COSTANTI DI TEMPO

- Si mettono in evidenza le costanti di tempo dei fenomeni dinamici del sistema

$$G(s) = \mu \frac{1}{s^g} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_j (1 + sT_j)} \cdot \frac{\prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} s + \frac{1}{\omega_{ni}^2} s^2)}{\prod_j (1 + \frac{2\xi_j}{\omega_{nj}} s + \frac{1}{\omega_{nj}^2} s^2)}$$

$\mu$ : guadagno

$g$ : tipo del sistema (# di integratori se  $> 0$ , # derivatori se  $< 0$ )

$T_i$ : costanti di tempo degli zeri

$T_j$ : costanti di tempo dei poli

(nb  $[s] = [t^{-1}]$ )

## - ANTITRASFORMATE: PROPRIETÀ ASINTOTICHE

• Data  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  è possibile valutare l'andamento iniziale e finale di  $f(t)$  senza calcolarla esplicitamente

• Th del valore iniziale:

$$f(0^+) \triangleq \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

$$\dot{f}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s [sF(s) - f(0^+)] \quad \text{etc.}$$

• Th del valore finale:

se  $F(s)$  ha tutti i poli con  $\text{Re}(p) < 0$  o al più nulli

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

## - APPLICAZIONE: RISPOSTE A SCALINO

$$\text{scal}(t) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow y(t) \quad ? \quad Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s G(s) \frac{1}{s} = G(\infty)$$

$$\dot{y}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[ s G(s) \cdot \frac{1}{s} - y(0^+) \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} s(G(s) - G(\infty))$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) \frac{1}{s} = G(0) \quad \text{solo se i poli di } G(s) \text{ sono a parte reale negativa o nulli}$$

- METODO DI HEAVISIDE PER IL CALCOLO DELL'ANTITRASFORMATA

- Supponiamo che  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  sia razionale:  $F(s) = \frac{D(s)}{N(s)}$

è sempre possibile esprimerla come somma di frazioni semplici di cui è nota l'antitrasformata

• Poli reali distinti  $D(s) = \prod_i (s - p_i) \quad (p_i \neq p_k \quad i \neq k)$

$$F(s) = \sum_i \frac{\alpha_i}{s - p_i}$$

si cercano gli  $\alpha_i$  per identità di polinomi, dopo di che si antitrasformano i singoli termini

$$f(t) = \sum_i \alpha_i e^{p_i t} \operatorname{sca}(t)$$

Esempio:  $F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \quad \begin{matrix} p_1 = -2 \\ p_2 = -3 \end{matrix}$

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+3} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)s + (3\alpha_1 + 2\alpha_2)}{(s+2)(s+3)}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}$$

$$f(t) = \left( -1 \cdot e^{-2t} + 2 e^{-3t} \right) \operatorname{sca}(t)$$

- Poli reali multipli  $D(s) = (s-p_1)^k \cdot (s-p_2) \cdot \dots$

si includono gli addendi con il denominatore elevato alle potenze da 1 fino a k

$$F(s) = \frac{\alpha_{11}}{s-p_1} + \frac{\alpha_{12}}{(s-p_1)^2} + \dots + \frac{\alpha_{1k}}{(s-p_1)^k} + \frac{\alpha_2}{s-p_2} + \dots$$

si calcolano gli  $\alpha_i$  per identità dei polinomi, quindi si antroformano gli addendi

$$\frac{\alpha_i}{s-p_i} \rightarrow \alpha_i e^{p_i t} \text{ sca}(t)$$

$$\frac{\alpha_{ik}}{(s-p_i)^k} \rightarrow \alpha_{ik} e^{p_i t} \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \text{ sca}(t)$$

Esempio

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)^2} = \frac{\alpha_{11}}{s+1} + \frac{\alpha_{12}}{(s+1)^2} = \frac{\alpha_{11}s + (\alpha_{11} + \alpha_{12})}{(s+1)^2}$$

$$\begin{cases} \alpha_{11} = 1 & \alpha_{11} = 1 \\ \alpha_{11} + \alpha_{12} = 0 & \alpha_{12} = -1 \end{cases}$$

$$f(t) = \left( 1 \cdot e^{-t} - 1 e^{-t} \cdot t \right) \text{ sca}(t)$$



- Poli complessi coniugati  $D(s) = (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) \cdot (s-p_3) \cdot \dots$

$$(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) = (s + \xi\omega_n)^2 + \omega^2 \quad [\omega^2 = (1 - \xi^2)\omega_n^2]$$

si aggiungono due termini così costruiti alla sommatoria

$$F(s) = \alpha_1 \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega^2} + \alpha_2 \frac{\omega}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega^2} + \dots$$

si trovano gli  $\alpha_i$  al solito modo, dopodiché antitrasformando:

$$f(t) = \alpha_1 e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega t) + \alpha_2 e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega t)$$

si ottengono termini oscillanti

- smorzati per  $\xi > 0$
- permanenti per  $\xi = 0$  a pulsazione  $\omega = \omega_n$
- amplificati per  $\xi < 0$

• Esempio  $F(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+8} = \frac{s+1}{(s+2)^2+2^2} =$

$$= \alpha_1 \frac{s+2}{(s+2)^2+2^2} + \alpha_2 \frac{2}{(s+2)^2+2^2} = \frac{\alpha_1 s + 2\alpha_1 + 2\alpha_2}{(s+2)^2+2^2}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(t) = \left( 1 \cdot e^{-2t} \cos(2t) - \frac{1}{2} e^{-2t} \sin(2t) \right) \text{sc}(t)$$

- STABILITÀ  $\leftrightarrow$  FdT

Possiamo ora studiare la stabilità esterna di un generico sistema lineare con f.d.t  $G(s)$ : applichiamo un impulso all'ingresso e valutiamo l'andamento dell'uscita

$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1 \Rightarrow \boxed{Y(s) = G(s)}$$

- Scomponiamo quindi  $G(s)$  in somma di proli semplici

- I termini corrispondenti a poli con  $\text{Re}(p) < 0$  tendono a zero
- I termini corrispondenti a poli semplici con  $\text{Re}(p) = 0$  restano vicino a zero ma non vi tornano ( $p = 0$ ) o oscillano attorno allo zero ( $p = \pm j\omega$ )
- I termini corrispondenti a poli multiplici con  $\text{Re}(p) = 0$  si allontanano da 0 come  $t^{k-1}$
- I termini corrispondenti a poli con  $\text{Re}(p) > 0$  si allontanano esponenzialmente da 0

## - Pertanto:

- (A) Tutti i poli con  $\text{Re}(p) < 0 \Rightarrow$  asintotica stabilità
- (B) Tutti i poli con  $\text{Re}(p) \leq 0$ ,  $\exists p \mid \text{Re}(p) = 0$  semplice  $\Rightarrow$  semplice stabilità
- (C) Tutti gli altri casi  $\Rightarrow$  instabilità

## - OSSERVAZIONE

- In generale, per valutare la stabilità di una certa FdT occorre fattorizzare il denominatore, cioè calcolare esplicitamente i poli

- Esistono però diversi criteri che permettono di valutare l'asintotica stabilità di una FdT a partire dai coefficienti del denominatore, senza calcolare i poli. Tra gli altri

- Th 1: CN per l'asintotica stabilità è che tutti i coefficienti del denominatore sono positivi

- Th 2: la condizione è anche sufficiente se il polinomio è di II° grado

- ESEMPIO: SISTEMA MASSA-MOLLA  $G(s) = \frac{1}{ms^2 + hs + k}$

(A) Molla + ammortizzatore  $h > 0$   $k > 0$

tutti i coeff. positivi  $\rightarrow \operatorname{Re}(p) < 0 \Rightarrow$  sistema as. stabile

(oscilla se i poli sono complessi, cioè per  $h^2 < 4km$ )

(B) Solo molla  $h = 0$   $k \neq 0$

$$D(s) = ms^2 + k = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm j \omega_n$$

$\operatorname{Re}(p) = 0$  poli semplici

$\Rightarrow$  sistema semplicemente stabile

(c) Solo ammortizzatore  $h > 0$   $k = 0$

$$D(s) = ms^2 + hs = 0 \quad p_1 = 0 \quad p_2 = -\frac{h}{m}$$

$\text{Re}(p) < 0 \quad \exists p = 0$  semplice  $\Rightarrow$  sistema semplice stabile

(d) Nessun vincolo  $h = 0$   $k = 0$

$$D(s) = ms^2 \quad p_{1,2} = 0 \quad 2 \text{ poli } \text{Re}(p) = 0 \text{ coincidenti}$$

$\Rightarrow$  sistema instabile

— o — o —

- STABILITÀ EQUILIBRI SISTEMI NON LINEARI

- Si linearizzano le equazioni del sistema  $S$  nell'intorno dell'equilibrio e si calcola la f.d.t tra  $\Delta u$  e  $\Delta y$

- Si valutano i poli della f.d.t

• Se  $\text{Re}(p_i) < 0 \quad \forall_i \rightarrow$  equilibrio asintoticamente stabile

• Se  $\exists i / \text{Re}(p_i) > 0 \rightarrow$  equilibrio instabile

• Altrimenti non si può concludere nulla sulla stabilità dell'equilibrio

- Esempio: pendolo

• Se  $h > 0$ ,  $\theta = 0 \rightarrow$  equilibrio asint. stabile  
 $\theta = \pi \rightarrow$  equilibrio instabile

• Se  $h = 0$   $\theta = 0 \rightarrow ?$   
 $\theta = \pi \rightarrow$  equilibrio instabile

## - RISPOSTE CANONICHE

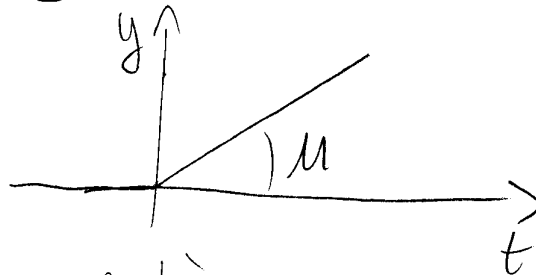
- Può essere interessante studiare le risposte a scalino dei più semplici sistemi dinamici: poiché lo scalino non ha una "forma" propria, l'andamento dell'uscita (lento, veloce, oscillante, etc.) dipende solamente della dinamica del sistema
- Dove possibile, fornire riferimento agli esempi già illustrati

① INTEGRATORE (f.d.t. portata  $\rightarrow$  livello nel serbatoio a portata ~~costante~~ <sup>impressa</sup>)

$$G(s) = \frac{\mu}{s}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{\mu}{s^2}$$

$$y(t) = \mu \text{ram}(t)$$



N.B. è detto integratore perché

$$Y(s) = \frac{\mu}{s} U(s)$$

$$sY(s) = \mu U(s)$$

$$\text{hp: } y(0) = 0$$

$$\dot{y}(t) = \mu u(t)$$

$$y(t) = \mu \int_0^t u(\tau) d\tau$$

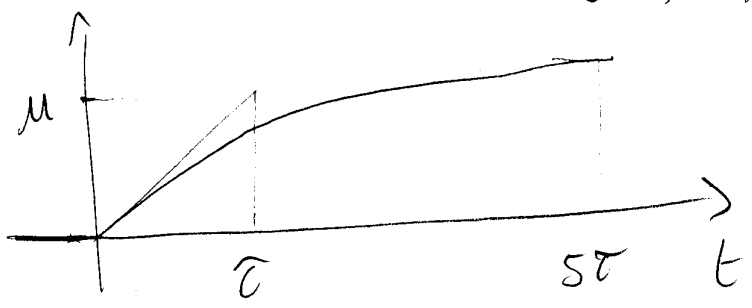
FDT

- 1 POLO REALE (pct + Qj → T termosifone)

$$G(s) = \frac{\mu}{1+sT}$$

$$Y(s) = \frac{\mu}{s(1+sT)} = \frac{\mu}{s} - \frac{\mu}{s + \frac{1}{T}}$$

$$y(t) = \mu (1 - e^{-t/T}) \text{sc}(t)$$



NB:  $\mu$ :  $\frac{\text{ampiezza uscite a regime}}{\text{ampiezza ingresso a regime}}$

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \mu$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{\mu}{T}$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \mu$$

- POLO/ZERO

$$G(s) = \mu \frac{1+s\tilde{\tau}}{1+sT}$$

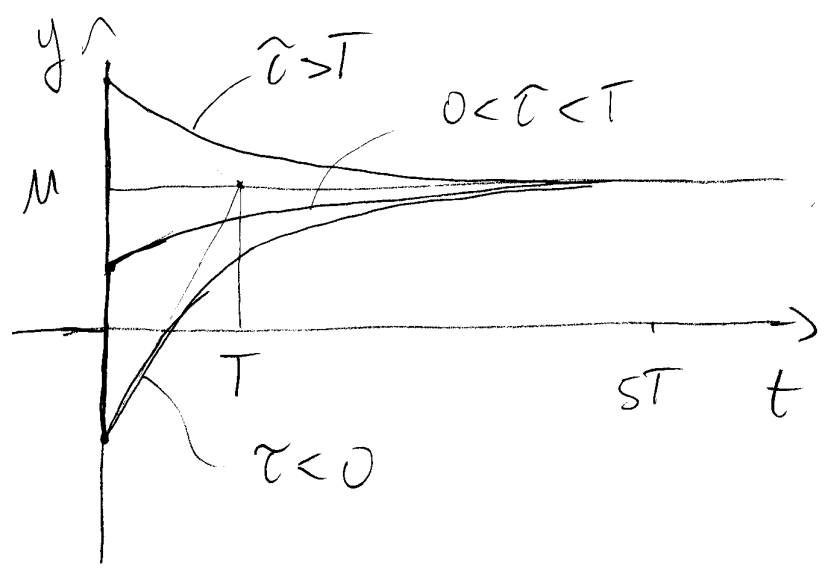
$$Y(s) = \mu \frac{1+s\tilde{\tau}}{s(1+sT)} = \frac{\mu}{s} - \mu \frac{1 - \frac{\tilde{\tau}}{T}}{s + \frac{1}{T}}$$

$$y(t) = \mu \left( 1 - \frac{T - \tilde{\tau}}{T} e^{-t/T} \right) \text{sc}(t)$$

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \mu \frac{\tilde{\tau}}{T}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s[G(s) - y(0)] = \\ &= \mu \frac{T - \tilde{\tau}}{T^2} \end{aligned}$$

$$y(\infty) = G(0) = \mu$$



# FdT

(22)

- POLO / ZERO ORIGINE (fct  $T_e \rightarrow Q_e$  termosifone)

$$G(s) = M \frac{s}{1+sT}$$

$$Y(s) = M \frac{1}{1+sT} = \frac{M}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

$$y(t) = \frac{M}{T} e^{-t/T} \text{sca}(t)$$

$$y(0) = G(\infty) = \frac{M}{T}$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[G(s) - \frac{M}{T}] = -\frac{M}{T^2}$$

$$y(\infty) = G(0) = 0$$



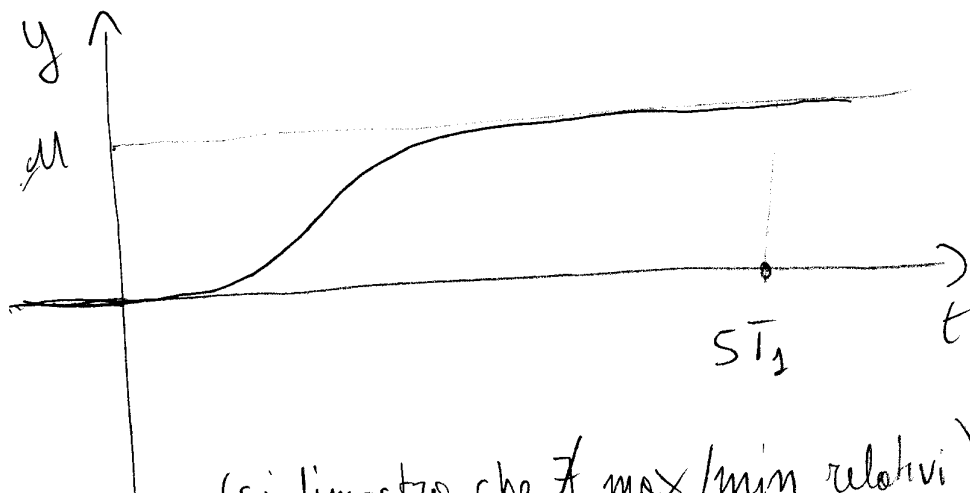
- DUE POLI REALI  $\neq$  (fct  $DQ \rightarrow DT$  calda) ( $T_1 > T_2 > 0$ )

$$G(s) = M \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

$$Y(s) = \frac{M}{s(1+sT_1)(1+sT_2)} =$$

$$= \frac{M}{s} - \frac{M \frac{T_1}{T_1 - T_2}}{s + \frac{1}{T_1}} - \frac{M \frac{T_2}{T_2 - T_1}}{s + \frac{1}{T_2}}$$

$$y(t) = M \left[ 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-t/T_2} \right] \text{sca}(t)$$



$$y(0) = G(\infty) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = 0$$

$$\ddot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 G(s) = \frac{M}{T_1 T_2}$$

$$y(\infty) = G(0) = M$$

(si dimostra che  $\nexists$  max/min relativi)

# FDT

(23)

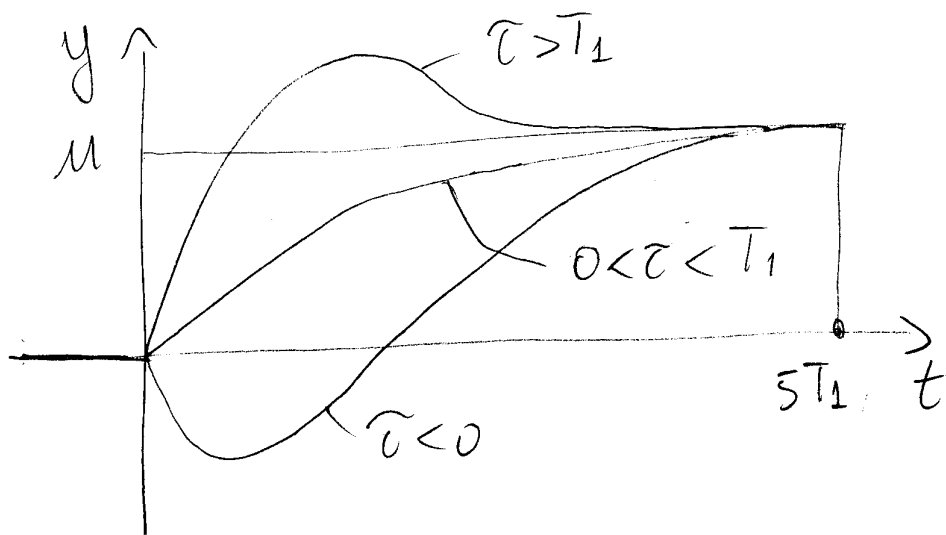
- DUE POLI / UNO ZERO (fdt  $\Delta W \rightarrow \Delta T$  caldaia)

$$G(s) = \mu \frac{1 + s\tau}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

$$T_1 > T_2 > 0$$

$$Y(s) = \mu \frac{1 + s\tau}{s(1 + sT_1)(1 + sT_2)} = \frac{\mu}{s} - \frac{\mu \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2}}{s + \frac{1}{T_1}} - \frac{\mu \frac{T_2 - \tau}{T_2 - T_1}}{s + \frac{1}{T_2}}$$

$$y(t) = \mu \left[ 1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} - \frac{T_2 - \tau}{T_2 - T_1} e^{-t/T_2} \right] \text{sca}(t)$$



$$y(0) = G(\infty) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = \frac{\mu\tau}{T_1 T_2}$$

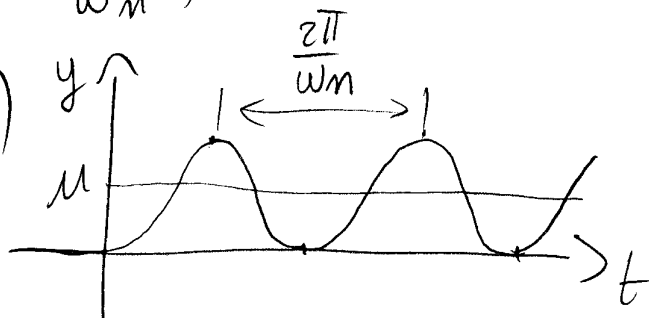
$$y(\infty) = G(0) = \mu$$

- DUE POLI IMMAGINARI PURI (massa-molla,  $h=0$ )

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + \frac{1}{\omega_m^2} s^2}$$

$$Y(s) = \frac{\mu}{s(1 + \frac{1}{\omega_m^2} s^2)} = \frac{\mu}{s} - \mu \frac{s}{s^2 + \omega_m^2}$$

$$y(t) = \mu \left[ 1 - \cos(\omega_m t) \right] \text{sca}(t)$$





# FDT

(24)

- DUE POLI COMPLESSI CONIUGATI (masso-dollo,  $h > 0$ )

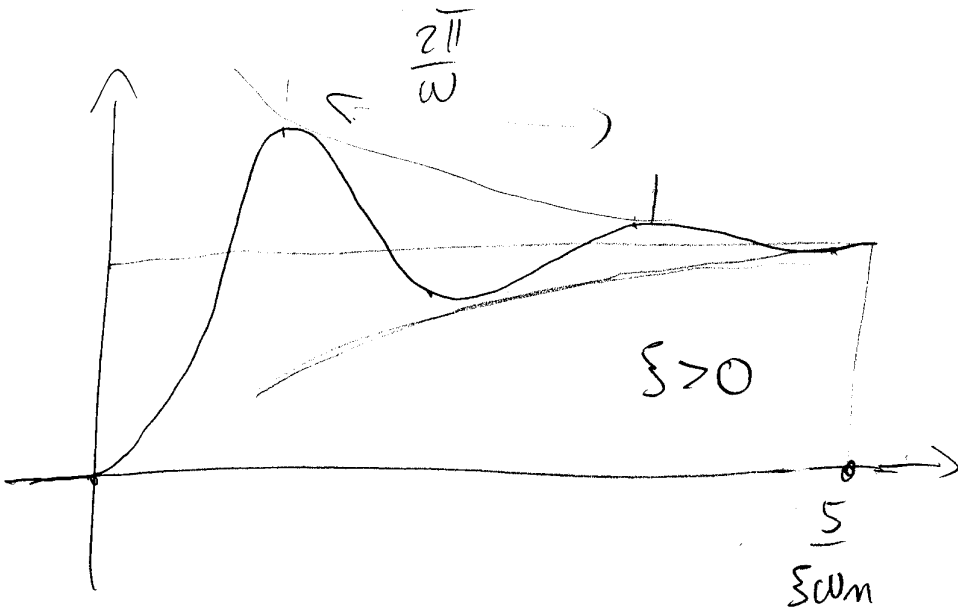
$$G(s) = M \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_m} s + \frac{1}{\omega_m^2} s^2}$$

$$Y(s) = \frac{M}{s \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_m} s + \frac{1}{\omega_m^2} s^2 \right)}$$

$$Y(s) = \frac{M \omega_m^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_m s + \omega_m^2)} = \frac{M}{s} - \frac{s + \xi\omega_m}{(s + \xi\omega_m)^2 + \omega^2} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{\omega}{(s + \xi\omega_m)^2 + \omega^2}$$

$$y(t) = M \left[ 1 - e^{-\xi\omega_m t} \left( \cos(\omega t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega t) \right) \right] \text{scat}(t)$$

$$\omega = \sqrt{1-\xi^2} \omega_m$$



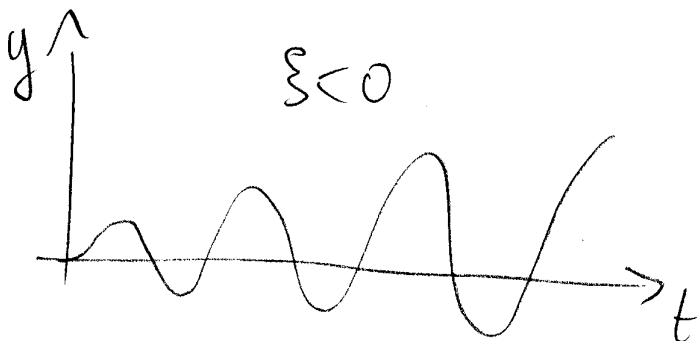
$$y(0) = G(\infty) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = 0$$

$$\ddot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 G(s) = M \omega_m^2$$

$$y(\infty) = G(0) = M$$

(solo se  $\xi > 0$ )



## - CONCLUSIONI

•  $G(0)$ : guadagno statico ( $\frac{\Delta y}{\Delta u}$  a regime);  $G(0) = \mu$  se  $g=0$

• Poli: • stabilità ( $\text{Re}(p) < 0$ )  
• oscillazioni (poli cplx)

• tempo assestamento  $\max\left(T_i, \frac{1}{\xi_i \omega_{ni}}\right)$

• Zeri • "anticipano" o "ritardano" la risposta  
(zeri negativi) (zeri positivi)

• zeri negativi ( $\tilde{\tau} > 0$ )  $\rightarrow$  sovraelongazioni

• zeri positivi ( $\tilde{\tau} < 0$ )  $\rightarrow$  sottoelongazioni

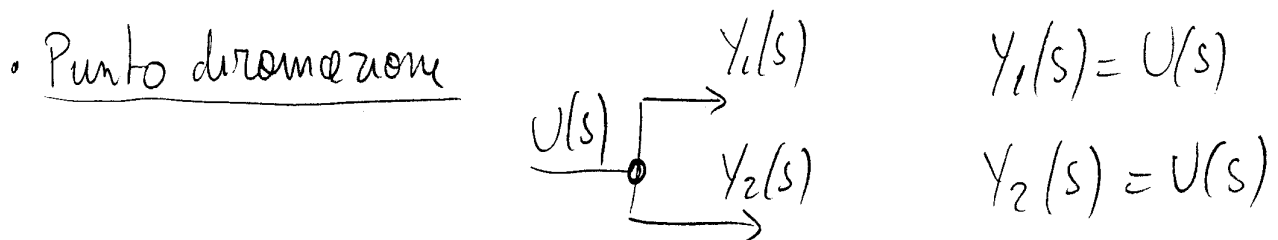
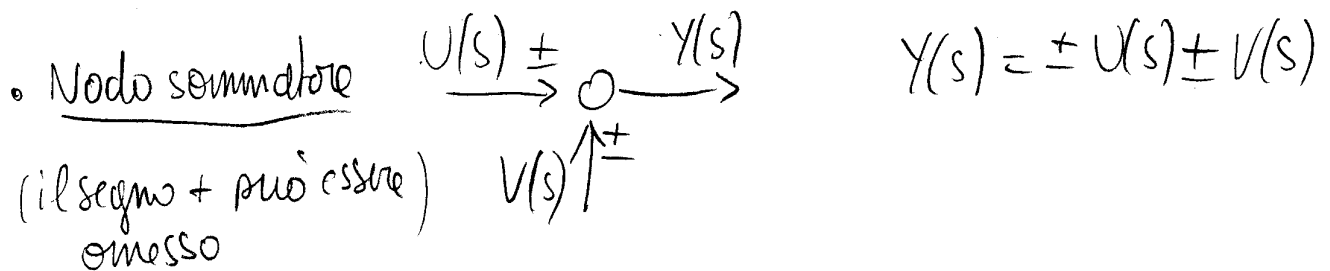
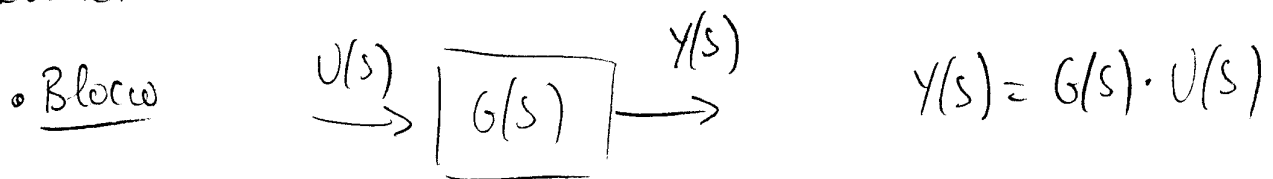
# SCHEMI A BLOCCHI

①

## - INTRODUZIONE

- Molti sistemi dinamici di interesse comune risultano dalla connessione di più sottosistemi tra di loro
- Questo vale in particolare per i sistemi di controllo, che risultano dalla connessione di sistema da controllare, regolatori, sensori e attuatori
- Limitandoci a sistemi dinamici lineari, l'obiettivo è di analizzare la dinamica (cioè le p.d.t.) di sistemi composti

## - ELEMENTI DI UNO SCHEMA



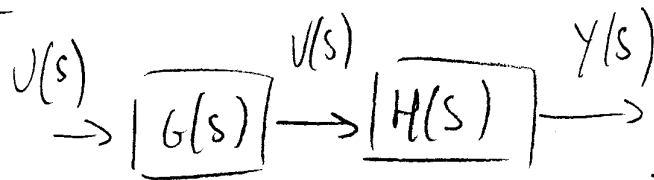
- L'obiettivo dell'analisi è di trovare le p.d.t. tra tutti gli ingressi e tutte le uscite dello schema

# SCHEMI A BLOCCHI

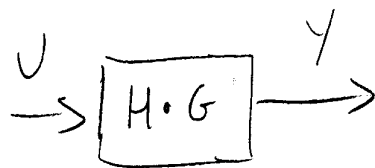
(2)

## SCHEMI BASE

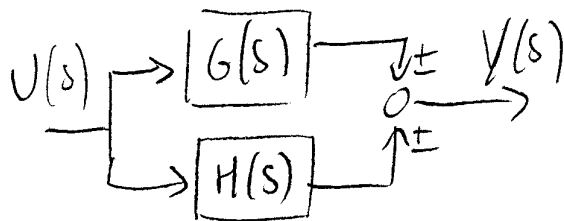
### • Cascata



$$Y(s) = H(s) \cdot V(s) = [H(s) \cdot G(s)] U(s)$$



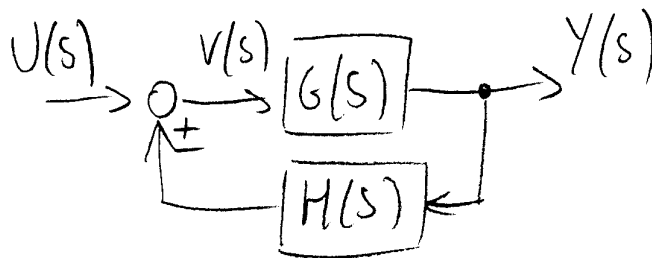
### • Parallelo



$$Y(s) = \pm G(s) \cdot U(s) \pm H(s) \cdot U(s) = [\pm H(s) \pm G(s)] U(s)$$

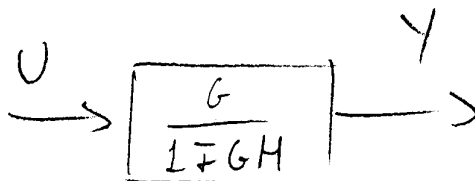


### • Retroazione



$$Y(s) = G(s) \cdot V(s) = G(s) [U(s) \pm H(s) Y(s)]$$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)} U(s)$$

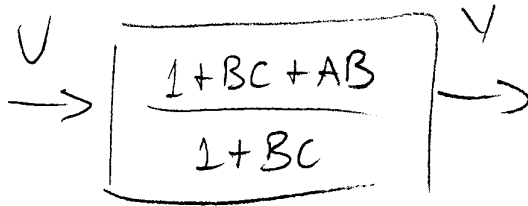
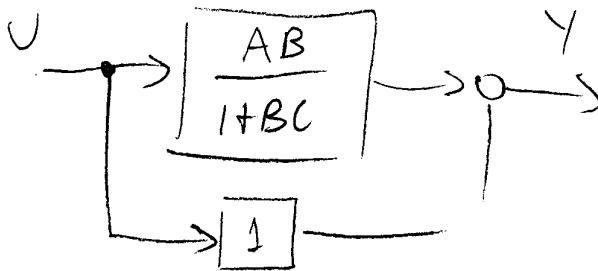
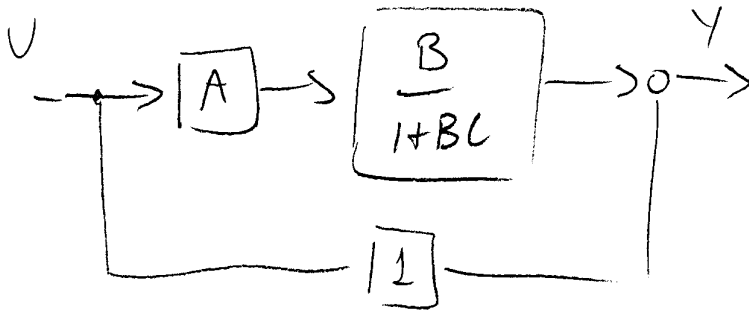
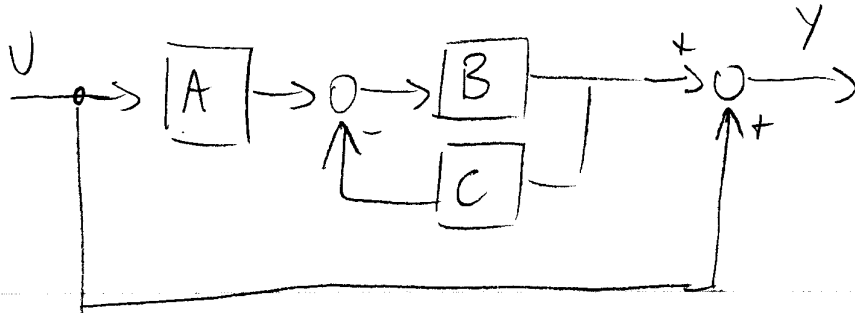


# SCHEMI A BLOCCHI

3

## - SCHEMI COMPLESSI

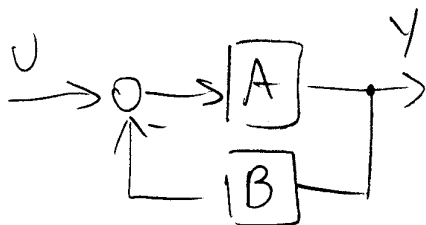
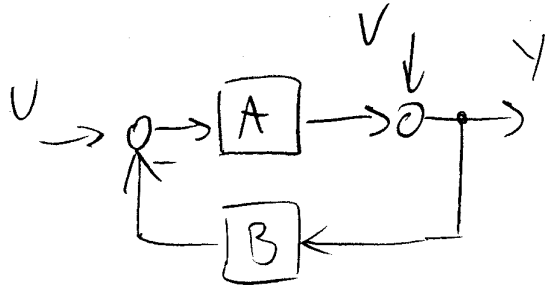
- La semplificazione di uno schema complesso può avvenire per semplificazioni successive di schemi di base: ad esempio



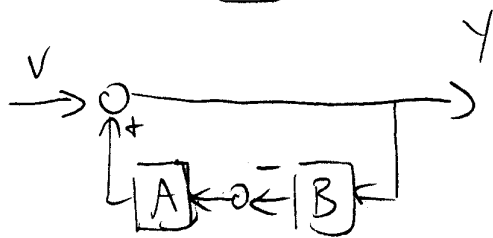
# SCHEMI A BLOCCHI

④

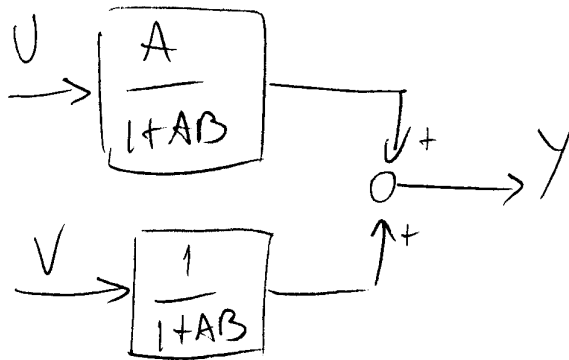
- Nel caso in cui ci siano più ingressi, si può analizzare un ingresso per volta e poi applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, ad esempio:



$$Y = \frac{A}{1+AB} U$$



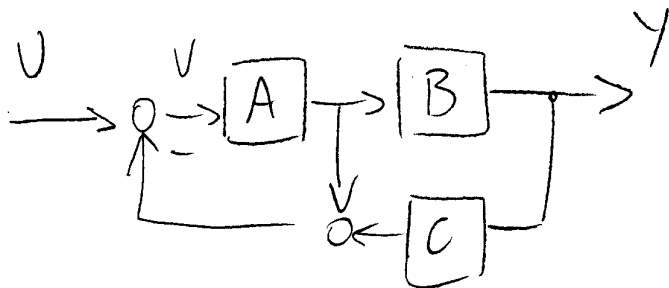
$$Y = \frac{1}{1+AB} U$$



## SCHEMI A BLOCCHI

⑤

- Nel caso di schemi più complessi si possono scrivere le equazioni corrispondenti e risolverle, ad es:



$$Y = B A V$$

$$V = U - (C Y + A V)$$

$$V = \frac{U - C Y}{1 + A}$$

$$Y = \frac{B A U}{1 + A} - \frac{B A C}{1 + A} Y$$

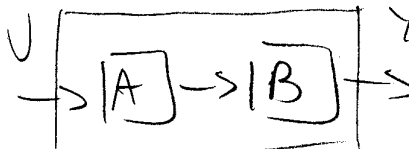
$$Y = \frac{\frac{B A}{1 + A}}{1 + \frac{B A C}{1 + A}} U = \left[ \frac{B A}{1 + A + B A C} \right] U$$

# SCHEMI A BLOCCHI

(6)

- SCHEMI A BLOCCHI E STABILITA'

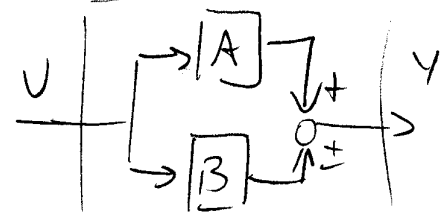
- Sono  $A(s) = \frac{N_A(s)}{D_A(s)}$        $B(s) = \frac{N_B(s)}{D_B(s)}$

• Cascata   $Y = BA \cdot U = \frac{N_A N_B}{D_A D_B} \cdot U$

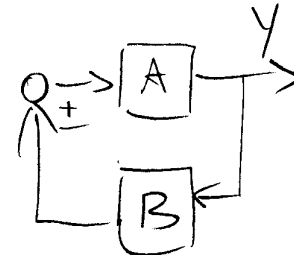
salvo cancellazioni, i poli della fct complessiva sono l'umore

dei poli di A, B quindi

$\left. \begin{array}{l} A \text{ as-stabile} \\ B \text{ as-stabile} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ sistema complessivo stabile}$

• Parallelo   $Y = [A \pm B] U = \frac{N_B \pm N_A}{D_A D_B} U$

idem come sopra

• Retroazione   $Y = \frac{A}{1 \mp AB} \cdot U = \frac{N_A \cdot D_B}{D_A D_B \mp N_A N_B} U$

→ I poli del sistema complessivo non hanno alcuna parentela diretta con quelli dei singoli componenti

→ la retroazione può alterare le proprietà di stabilità di un sistema



## SCHEMI A BLOCCHI

(7)

- Esempio 1:  $A = \frac{10}{1+s}$        $B = \frac{1-2s}{1+3s}$       (as. stabili)

$$\frac{A}{1+AB} = \frac{\frac{10}{1+s}}{1 + 10 \frac{1-2s}{(1+s)(1+3s)}} = 10 \frac{(1+3s)}{1+4s+3s^2+10-20s}$$

$$= 10 \frac{1+3s}{3s^2-16s+1} \quad (\text{instabile})$$

↑ CN: as stab. violata

- Esempio 2:  $A = \frac{1}{1+s}$        $B = -10$       (as. stabili)

$$\frac{A}{1+AB} = \frac{\frac{1}{1+s}}{1 - \frac{10}{1+s}} = \frac{1}{1+s-10} = \frac{1}{s-9} \quad (\text{instabile})$$

- RISPOSTA SINUSOIDALE

- Supponiamo di avere un segnale sinusoidale all'ingresso di un sistema lineare, asintoticamente stabile



$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cdot \text{sc}(t)$$

- Th della risposta in frequenza

- $y(t) = y_t(t) + y_a(t)$ , dove

- $y_t(t)$ : termine transitorio:  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_t(t) = 0$  e si può considerare praticamente nullo per

$$t > T_{\text{ass}}, \quad T_{\text{ass}} = 5 \max\left(-\frac{1}{\text{Re}(p)}\right) = 5 \max\left(T_j, \frac{1}{\xi_j \omega_{nj}}\right)$$

- $y_a(t)$ : uscita sinusoidale di regime

$$y_a(t) = A \cdot |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \angle G(j\omega))$$

- Dopo un transitorio di assestamento (per risposte a scalino) l'uscita è
- sinusoidale, alla stessa frequenza di  $u(t)$
  - amplificata di  $|G(j\omega)|$
  - sfasata di  $\angle G(j\omega)$

# RISPOSTA IN FREQ

(2)

## - RISPOSTA IN FREQUENZA

- Def risposta in frequenza:  $G(j\omega)$   $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

• è una restrizione di  $G(s)$  all'asse immaginario

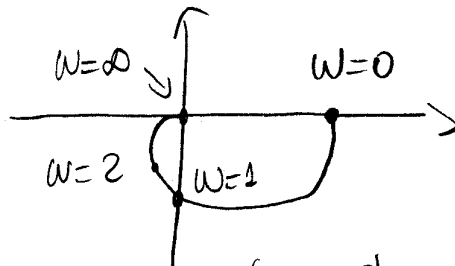
• è una funzione complessa della variabile reale  $\omega$

## - DIAGRAMMI POLARI

- È possibile rappresentare graficamente la r.i.f. come curva parametrica in  $\omega$  nel piano di Gauss

- Esempio

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$



$$G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^2} = \frac{1}{(1-\omega^2)+2j\omega} = \frac{(1-\omega^2)-2j\omega}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2}$$

## - DIAGRAMMI DI BODE

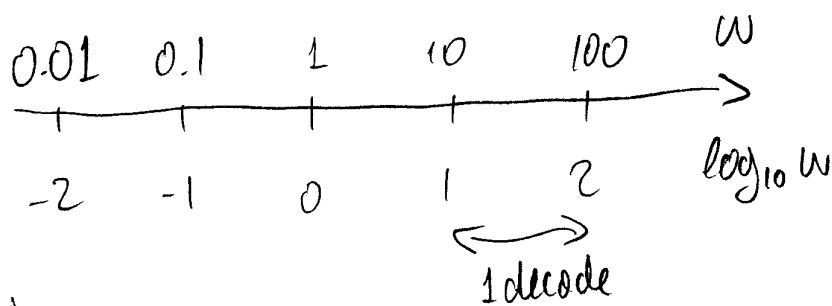
- Una scelta alternativa è di rappresentare separatamente in due diagrammi cartesiani il modulo e la fase di  $G(j\omega)$ , come funzioni di  $\omega$

- Per ragioni di praticità, si utilizzano assi logaritmici sia per  $\omega$  che per  $|G(j\omega)|$

# RISPOSTA IN FREQ

(3)

- Asse delle ascisse (pulsazioni  $\omega$ ): si rappresenta  $\log_{10} \omega$



- Asse ordinate

• Modulo: scala logaritmica espressa in dB

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

nb  $|G| = 10^{1G_{dB}/20}$

• Fase: scala lineare espressa in gradi

- COSTRUZIONE DEI DIAGRAMMI DI BODE

- Si esprime la fctt in forma guadagno / costanti di tempo

$$G(s) = \frac{M}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s\tau_i)}{\prod_j (1 + sT_j)} \frac{\prod_i (1 + \frac{z_i}{\omega_{ni}} s + \frac{1}{\omega_{ni}^2} s^2)}{\prod_j (1 + \frac{z_j}{\omega_{nj}} s + \frac{1}{\omega_{nj}^2} s^2)}$$

- la fctt è il prodotto di più termini; si sfruttano le proprietà dei numeri complessi

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$\angle(a \cdot b) = \angle a + \angle b$$

$$\angle \frac{a}{b} = \angle a - \angle b$$

- Analizziamo quindi il contributo dei singoli termini, che poi combineremo per costruire il diagramma complessivo

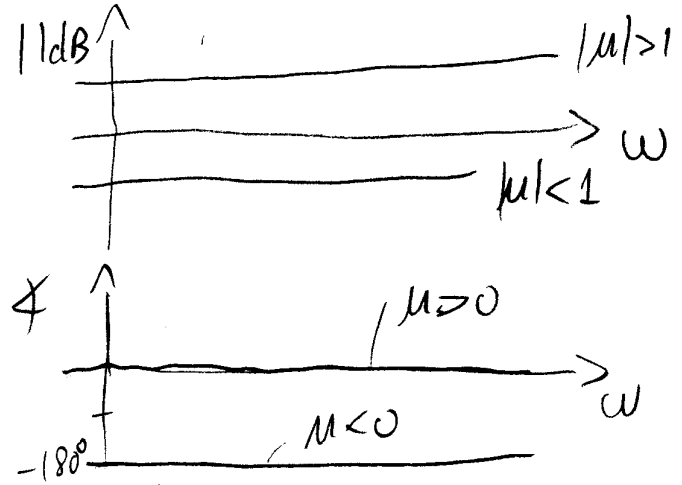
# RISPOSTA IN FREQ

(4)

• Guadagno

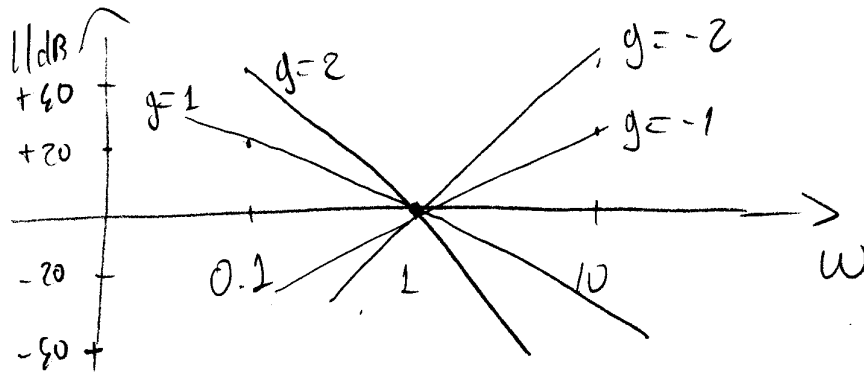
•  $|M|_{dB} = 20 \log_{10} |M|$

•  $\angle M = \begin{cases} 0^\circ & M > 0 \\ -180^\circ & M < 0 \end{cases}$

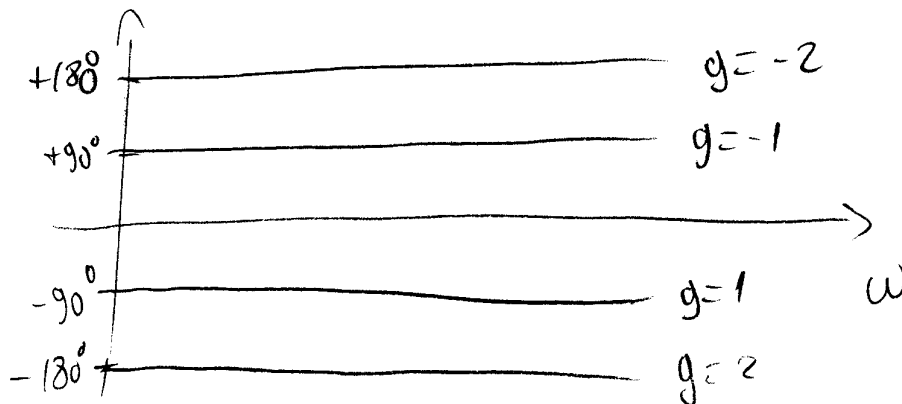


• Poli/zeri nell'origine

$$\left| \frac{1}{(j\omega)^g} \right|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{\omega^g} = -g \cdot 20 \log_{10} \omega$$

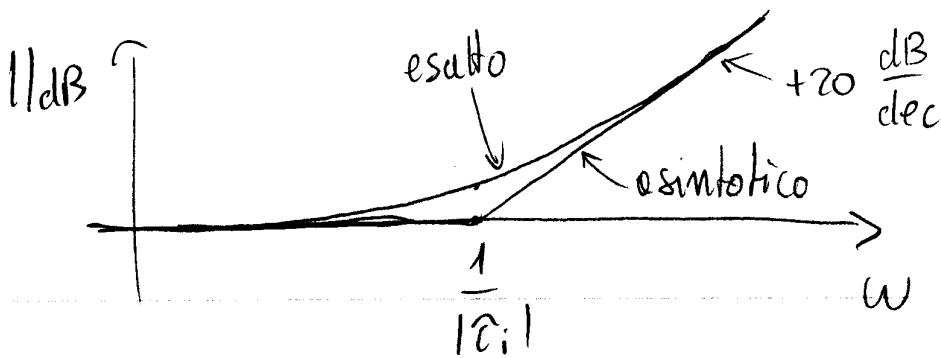


$$\angle \frac{1}{(j\omega)^g} = -g \cdot \angle(j\omega) = -g \cdot 90^\circ$$



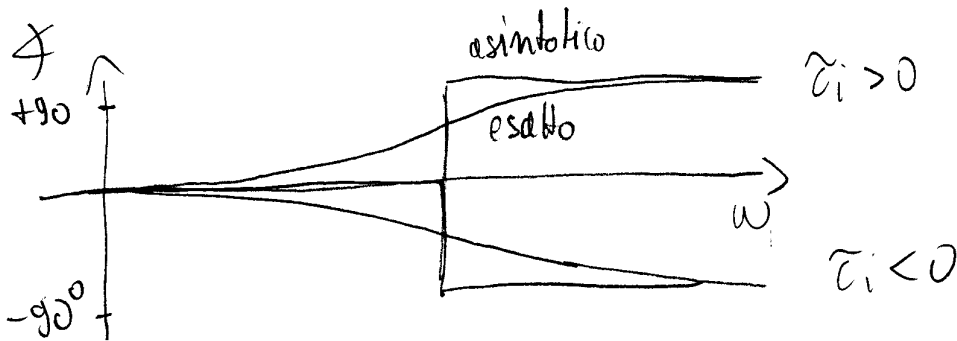
• Peri reali

$$|1 + j\omega\tau_i|_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega\tau_i)^2} \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll 1/|\tau_i| \\ 20 \log_{10} |\omega\tau_i| & \omega \gg 1/|\tau_i| \end{cases}$$



errore max: 3dB

$$\angle |1 + j\omega\tau_i| = \arctan \omega\tau_i \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll 1/\tau_i \\ 90 \cdot \text{sgn}(\tau_i) & \omega \gg 1/\tau_i \end{cases}$$



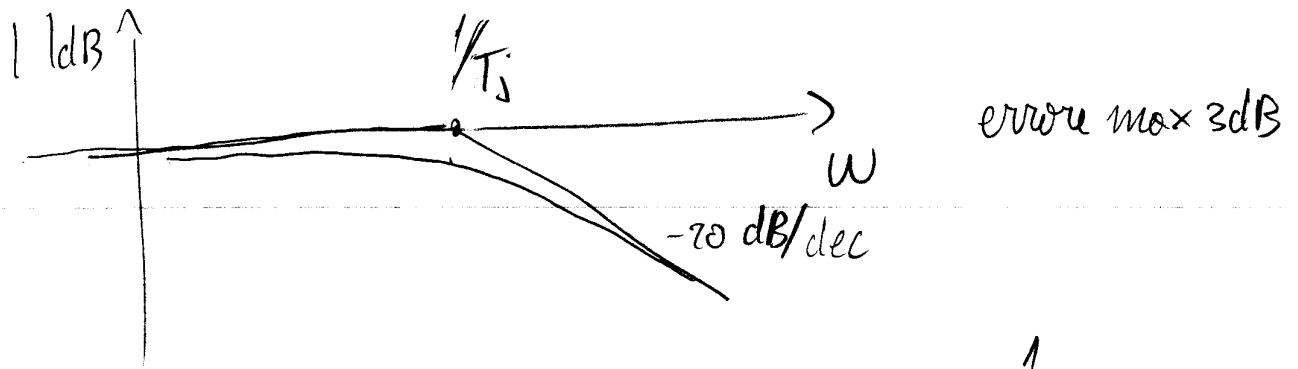
errore max: 45°

# RISPOSTA IN FREQUENZA

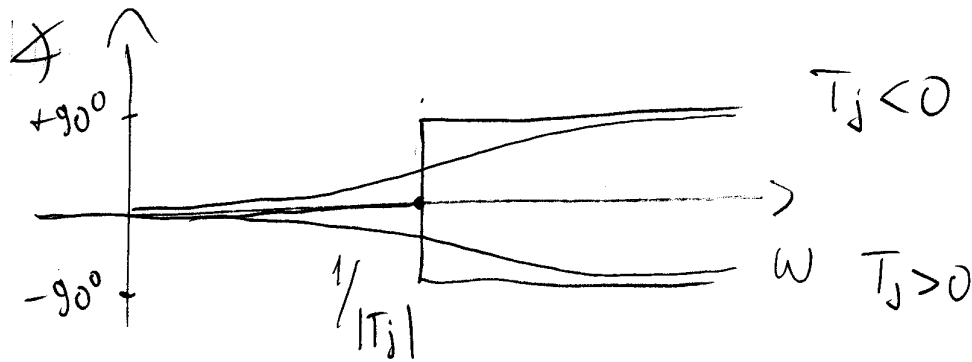
(6)

• Poli reali

$$\left| \frac{1}{1+j\omega T_j} \right|_{dB} = -20 \log_{10} \sqrt{1+(\omega T_j)^2} \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{|T_j|} \\ -20 \log_{10} |\omega T_j| & \omega \gg \frac{1}{|T_j|} \end{cases}$$



$$\angle \frac{1}{1+j\omega T_j} = -\arctan(\omega T_j) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{|T_j|} \\ -90^\circ \operatorname{sgn}(T_j) & \omega \gg \frac{1}{|T_j|} \end{cases}$$

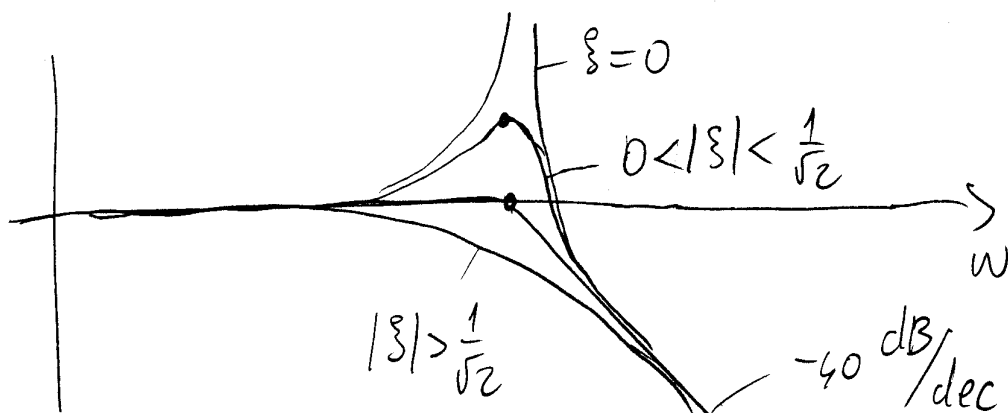


- NB i grafici relativi ai poli sono quelli degli zeri ribaltati rispetto all'asse delle ω

• Poli complessi coniugati

$$\left| \frac{1}{1 + \frac{2\xi j}{\omega_{nj}} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_{nj}^2}} \right|_{dB} = -20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nj}^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2 \omega^2}{\omega_{nj}^2}} \approx$$

$$\approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_n \\ -40 \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) & \end{cases}$$



$|\xi| > 0.7$  : nessun picco di risonanza, errore max 6 dB

$0 < \xi < 0.7$  : picco di risonanza in  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$

ampiezza  $\frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \approx \frac{1}{2\xi}$  per  $|\xi| < 0.4$

$\xi = 0$  asintoto verticale (n.b. il corrispondente sistema non è o simto ticamente stabile)

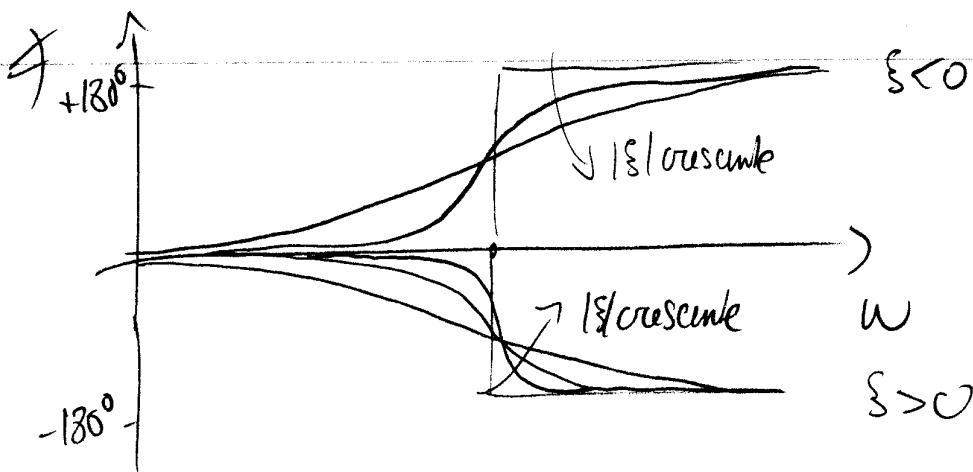


# RISPOSTA IN FREQ

(8)

$$\phi \approx \frac{1}{1 + \frac{2\xi j}{\omega_n j} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = -\arctan\left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right) \approx$$

$$\approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_n \\ -180 \operatorname{sgn}(\xi) & \omega \gg \omega_n \end{cases} \quad \text{per } \max 90^\circ$$



- la fase varia tanto più rapidamente quanto più  $|\xi|$  è piccolo

• zeri complessi coniugati

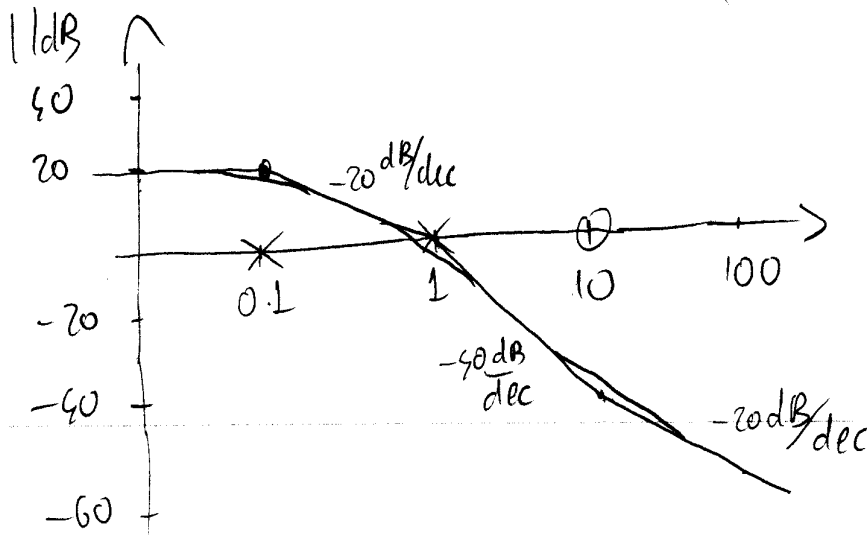
grafici 'riballati' rispetto all'asse  $\omega$

# RISPOSTA IN FREQ

9

- Esempio ①

$$G(s) = 10 \frac{(1+0.1s)}{(1+10s)(1+s)}$$

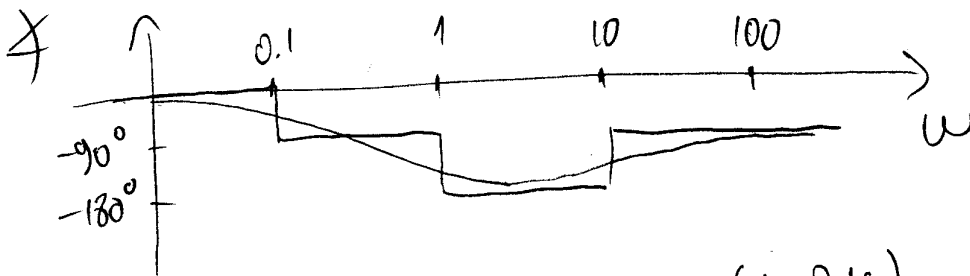


$$\frac{1}{|T_1|} = 0.1$$

$$\frac{1}{|T_2|} = 1$$

$$\frac{1}{|Z_1|} = 10$$

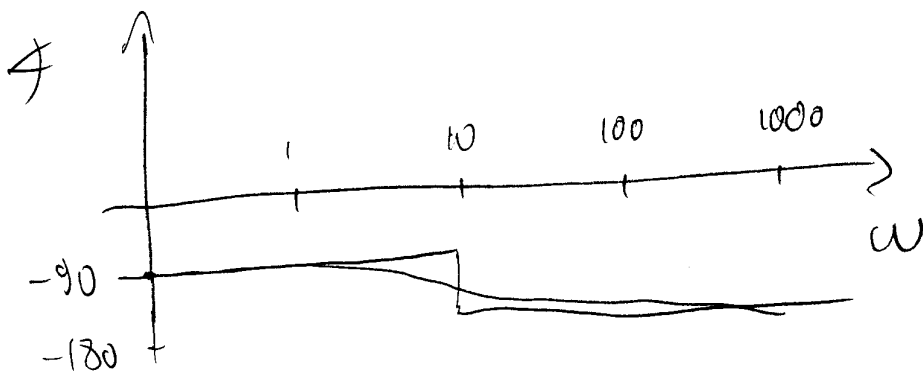
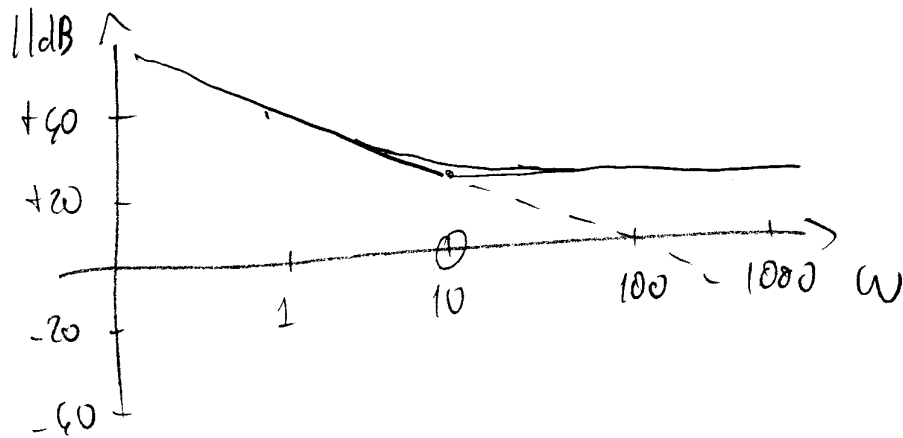
$$20 \log_{10} 10 = +20 \text{ dB}$$



- Esempio ②

$$G(s) = \frac{100(1-0.1s)}{s}$$

$$\frac{1}{|Z_1|} = 10$$



# RISPOSTA IN FREQ.

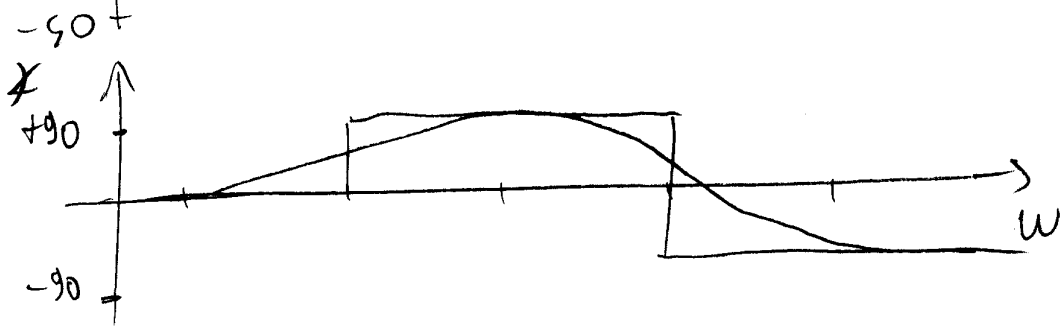
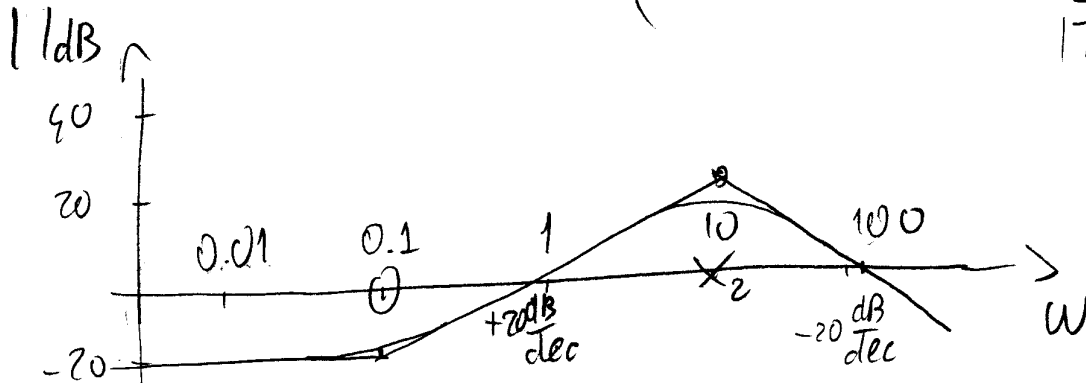
(10)

- Esempio (3)

$$G(s) = 0.1 \frac{(1+10s)}{(1+0.1s)^2}$$

$$\frac{1}{|T|} = 0.1$$

$$\frac{1}{|T|} = 10$$



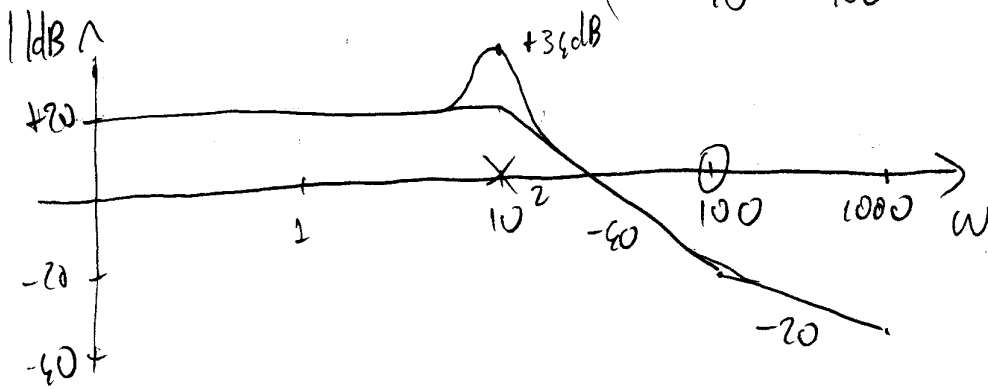
- Esempio (4)

$$G(s) = -10 \frac{1+0.01s}{\left(1 + \frac{2 \cdot 0.1}{10}s + \frac{1}{100}s^2\right)}$$

$$\xi = 0.1 < 0.7$$

$$\omega_n = 10$$

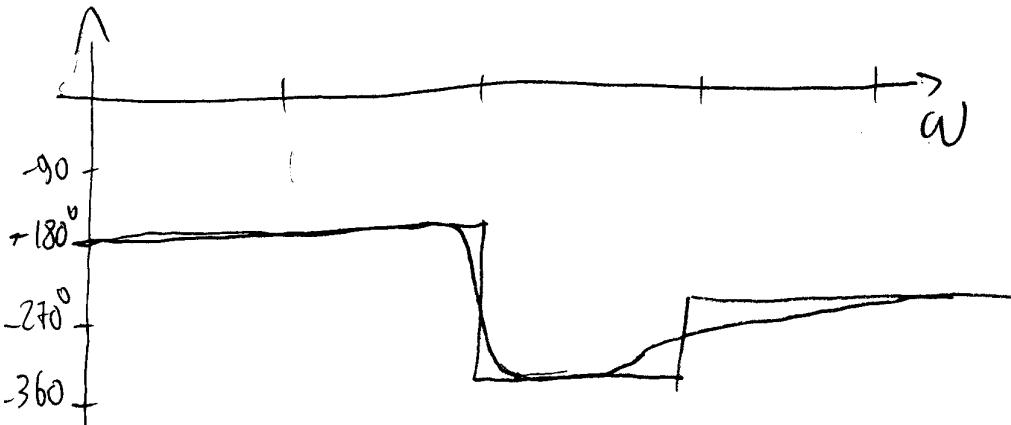
$$\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 5$$



$$20 \log_{10} 5 = 14$$

$$\omega_r = \sqrt{1-\xi^2} \omega_n \approx 10$$

$$\frac{1}{\tau} = 100$$

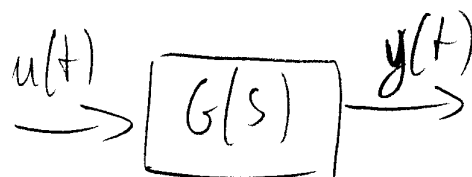


- CARATTERISTICHE POLI/ZERI

- Poli: attenuano ad alta frequenza
  - $T > 0$  ritardano (sistemi stabili)
  - $T < 0$  anticipano (sistemi instabili)
- Zeri: amplificano ad alta frequenza
  - $\tau > 0$  anticipano (sovralongoroni risposta scalino)
  - $\tau < 0$  ritardano (sottoelongoroni risposta scalino)
- Poli cplx amplificano per  $\omega \sim \omega_n$  (oscillazioni risposta scalino con  $\omega \sim \omega_n$ )
- Zeri cplx attenuano per  $\omega \sim \omega_n$

- SISTEMI LINEARI COME FILTRI

- In molti casi si può vedere un segnale  $u(t)$  come sovrapposizione di componenti armoniche (sinusoidali) a diverse frequenze
- P.es segnali periodici  $\rightarrow$  serie Fourier
 
$$u(t) = \sum_0^{\infty} A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t + \phi_n\right)$$
- Se diamo  $u(t)$  in ingresso ad un sistema as. stabile



# RISPOSTA IN FREQ

(12)

- Per il principio di sovrapposizione degli effetti, possiamo scomporre l'usata nella somma delle risposte alle singole armoniche

$$y_a(t) = \sum_n A_n |G(jn\frac{2\pi}{T})| \cos \left[ n\frac{2\pi}{T}t + \phi_n + \angle G(jn\frac{2\pi}{T}) \right]$$

→ Il sistema si comporta come "filtro", facendo passare alcune componenti del segnale e bloccando altre

