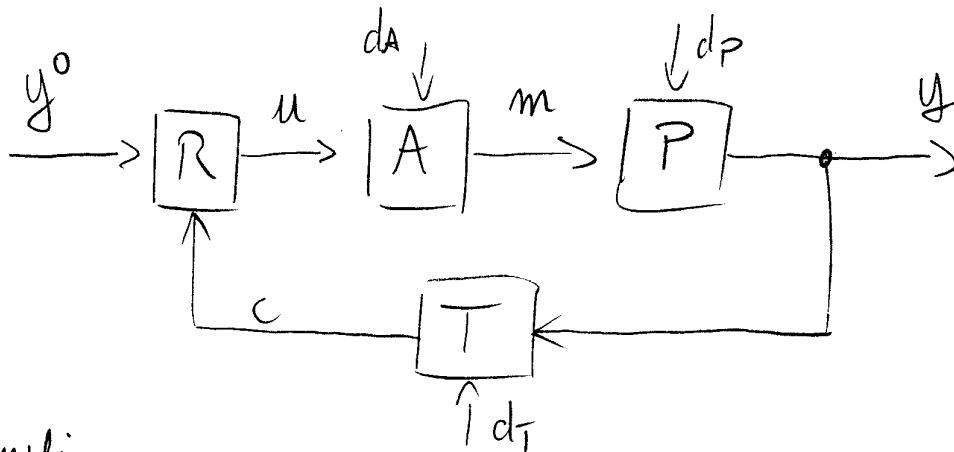


# SISTEMA CONTROLLO

①

- SCHEMA BASE DEL SISTEMA DI CONTROLLO IN RETROAZIONE



- Segnali

$y^o$ : setpoint / riferimento / valore desiderato di  $y$

$u$ : variabile di controllo (valore desiderato)

$m$ : variabile di controllo (valore effettivo, fisico)

$y$ : variabile controllata

$c$ : misura della variabile controllata

$d_A$ : disturbi attuatore

$d_P$ : disturbi processo

$d_T$ : disturbi misura

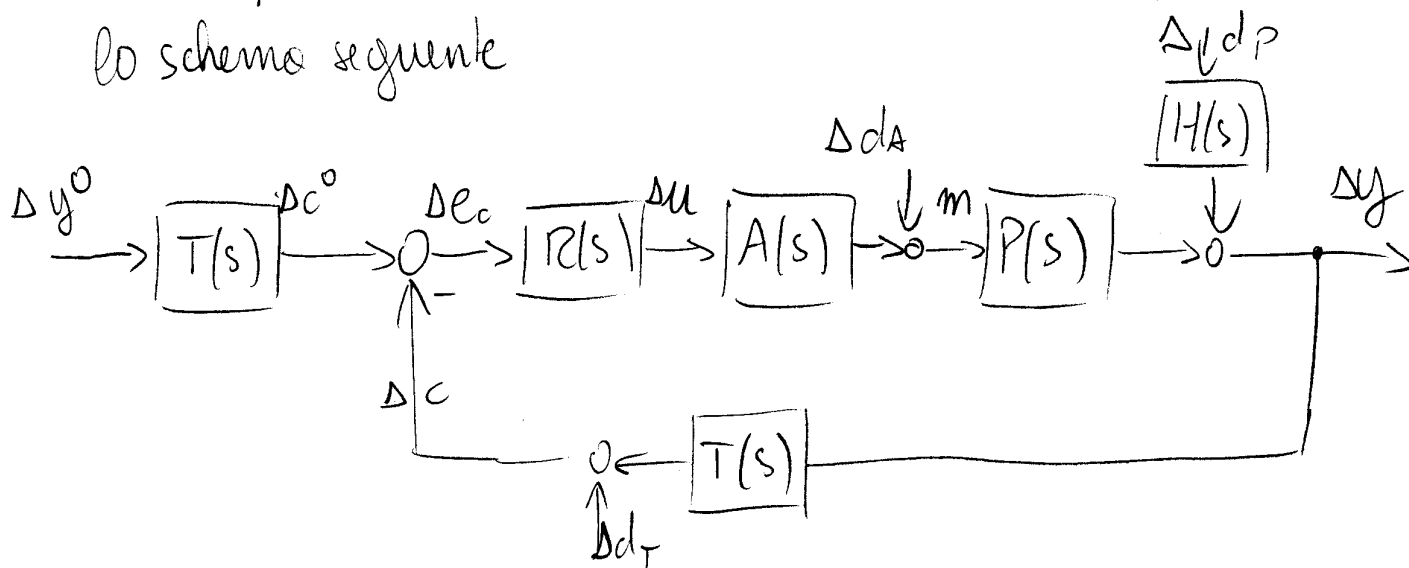
- Blocco P: processo da controllare

- Blocco A: attuatore: riceve un segnale dal sistema di controllo e lo "traduce" in una variabile fisica (esempi: valvola, riscaldatore elettrico, azionamento pompa a giri variabili) di norma funge da amplificatore di potenza

# SISTEMA CONTROLLO

(2)

- Blocco T: trasduttore/sensore: misura  $y$  e lo converte in un segnale compatibile con la tecnologia del regolatore
- Blocco R: regolatore / sistema di controllo, in base a  $y^o$  e  $c$ , decide i valori di  $u$  per avere  $y \approx y^o$
- In generale, A, P, T, R sono sistemi dinamici, possibilmente non lineari. Nell'intorno di un punto di lavoro del sistema, è possibile descriverli con buona approssimazione tramite i corrispondenti sistemi linearizzati. Si ottiene quindi lo schema seguente

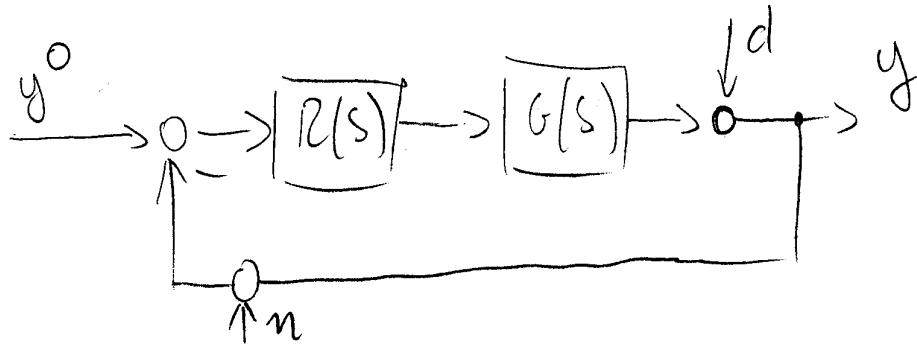


- Si è scelto qui di far dipendere  $u$  da  $e_c$ , cioè dalla differenza tra i valori desiderato e misurato di  $y$ . Sono possibili anche scelte differenti (regolatori a 2 gradi di libertà) su cui non ci soffermiamo
- Nel seguito omettiamo i  $\Delta$  per semplicità!!

# SISTEMA DI CONTROLLO

(3)

- In molti casi la dinamica dei sensori e/o degli attuatori è molto più veloce di quella del processo da controllare, per cui si approssimano le relative f.d.t con i loro guadagni statici  $A(s) \approx \mu_A$   $T(s) \approx \mu_T$ . In altri casi invece questa dinamica è significativa (p.es. termocoppie in un regolatore di temperatura)
- lo schema è equivalente al seguente:



con  $G(s) = A(s) \cdot P(s) \cdot T(s)$  — dinamica del processo "strumentato"

$d = H(s)d_p + P(s)d_a$  — disturbi in linea d'andata

$n = T(s)^{-1}d_T$  — disturbi in linea di retroazione

## OBIETTIVI DEL SISTEMA DI CONTROLLO

- Idealmente vorremmo che fosse

$\frac{Y(s)}{Y^0(s)} = 1$  inseguimento del riferimento

$\frac{Y(s)}{D(s)} = 0$  reiezione del disturbo

## - REQUISITI SISTEMA DI CONTROLLO

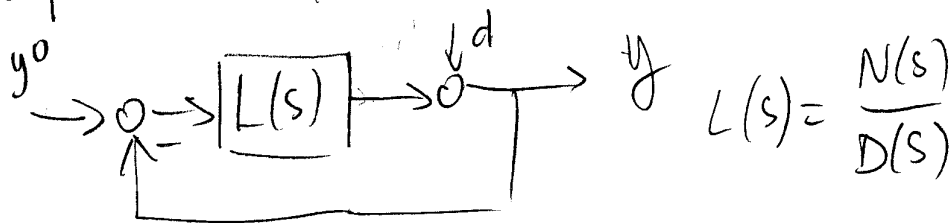
- Analizzeremo ora i quattro requisiti o specifiche fondamentali del sistema di controllo

- ① Stabilità
- ② Prestazioni statiche
- ③ Prestazioni dinamiche
- ④ Modificazione del controllo

## - STABILITÀ

- Il sistema di controllo deve essere stabile in anello chiuso per poter funzionare correttamente. Limitiamo l'analisi al caso in cui sia  $R(s)$  che  $G(s)$  abbiano poli con  $\text{Re}(p) \leq 0$

- Richiediamo l'analisi di stabilità dei sistemi ad anello chiuso; definendo la funzione d'anello  $L(s) = R(s)G(s)$



$$\frac{Y}{Y^0} = \frac{L}{1+L}$$

- Il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile se
- Il polinomio caratteristico  $\chi(s) = N(s) + D(s)$  ha radici con  $\text{Re}(p) < 0$
  - Eventuali cancellazioni polo/zero quando si forma il prodotto  $R(s) \cdot G(s)$  riguardano poli e zeri con  $\text{Re}(p) < 0$  (→ le parti 'nascoste' della dinamica sono as. stabili)

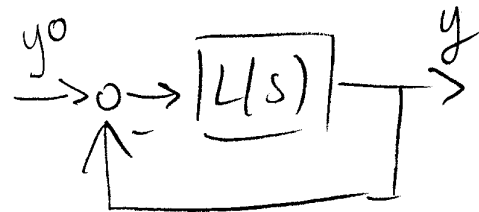
- Problema: capire come la scelta di  $R(s)$  (ovè il progetto del regolatore) influenza la stabilità (ovè la posizione delle radici di  $\chi(s)$ ) non è semplice. Occorre infatti fattorizzare un polinomio di ordine anche elevato, i cui coefficienti dipendono dai parametri del regolatore
- Per rendere più trasparente questo legame, si possono impiegare i cosiddetti criteri di stabilità per sistemi retroazionati, che valutano la stabilità del sistema ad anello chiuso (ovè la posizione delle radici di  $\chi(s)$ ) in base alle caratteristiche della sola funzione d'anello  $L(s)$
- Nell'ambito di questo corso faremo riferimento al criterio di Bode

# SISTEMA CONTROLLO

(6)

- CRITERIO DI BODE

- Ipotesi di applicabilità



①  $L(s)$  ha poli con  $\text{Re}(p) \leq 0$

②  $|L(j\omega)| = 1$  per un solo valore di  $\omega \triangleq \omega_c$   
(pulsazione critica)

ovvero il diagramma di Bode del modulo attraversa l'asse 0dB una sola volta in  $\omega_c$

Def.  $\varphi_c = \angle L(j\omega_c)$  sfasamento critico (di norma negativo)

Def.  $\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$  margine di fase

→ Th: il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

① •  $\mu_L > 0$

② •  $\varphi_m > 0$  ovvero  $\varphi_c > -180^\circ$

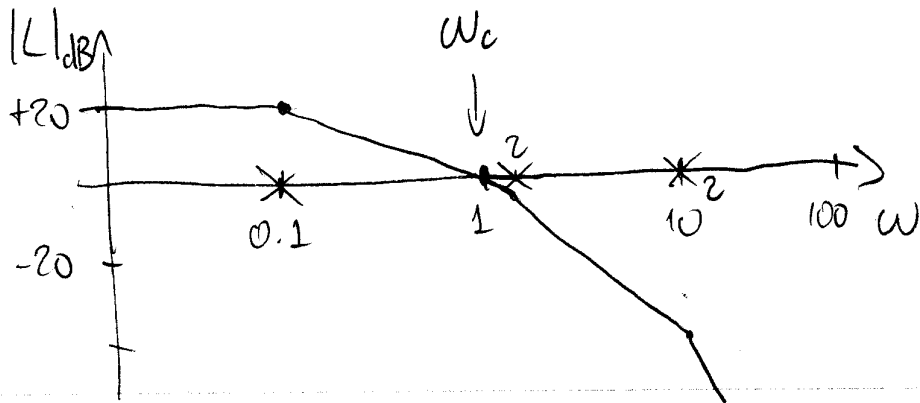
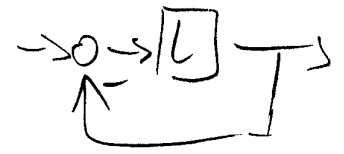
①: "Correggo gli errori nella direzione giusta"

②: "Senza un eccessivo ritardo"

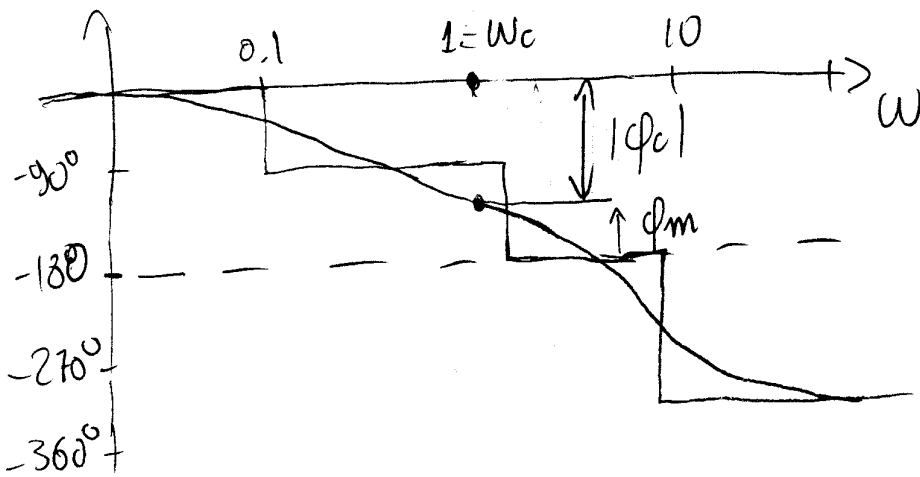
# SISTEMA CONTROLLO

(7)

- Esempio ①  $L(s) = \frac{10}{(1+10s)(1+0.5s)(1+0.1s)^2}$



$\omega_c \approx 1 \text{ rad/s}$



$$\begin{aligned} \phi_c &= -\arctan(10 \cdot 1) - \arctan(0.5 \cdot 1) - 2\arctan(0.1 \cdot 1) = \\ &= -84^\circ - 26^\circ - 11^\circ = -121^\circ \end{aligned}$$

$$\phi_m = 180^\circ - 121^\circ = 59^\circ > 0$$

$$\mu_L = +10 > 0$$

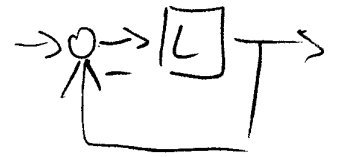
}  $\Rightarrow$

systema ad a.c.  
as. stabile

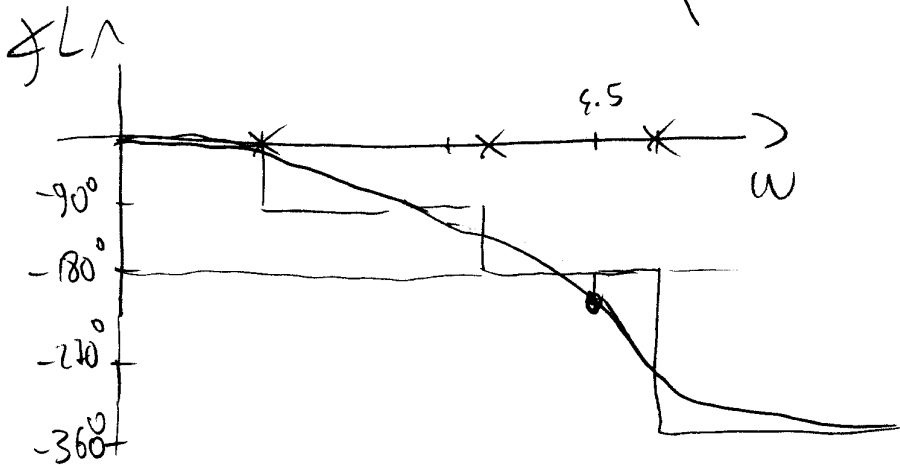
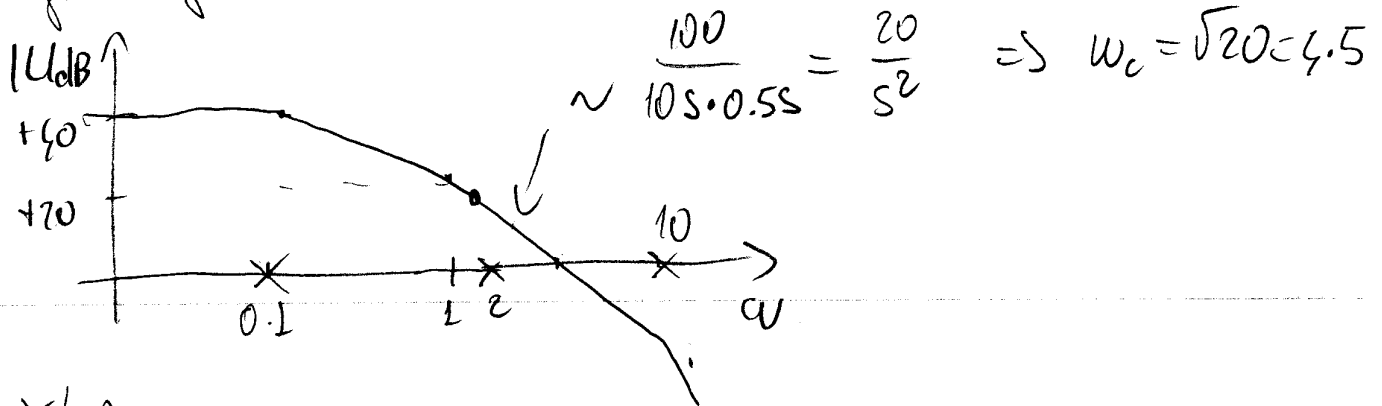
# SISTEMA CONTROLLATO

(8)

- Esempio (2)  $L(s) = \frac{100}{(1+10s)(1+0.5s)(1+0.1s)^2}$



(aumentato il guadagno)



$$\begin{aligned} \varphi_c &= -\arctan(4.5 \cdot 10) - \arctan(4.5 \cdot 0.5) - 2\arctan(4.5 \cdot 0.1) = \\ &= -89^\circ - 66^\circ - 48^\circ = -203^\circ \end{aligned}$$

$$\varphi_m = 180^\circ - 203^\circ = -23^\circ < 0 \quad \left. \vphantom{\varphi_m} \right\} \Rightarrow \text{ sistema instabile! }$$

$$\mu_L > 0$$



Osservazioni:

- ① Appare chiaro come tutto ciò che provoca spostamenti negativi nella risposta in frequenza del sistema da controllare (poli negativi, zeri positivi, ritardi puri) sia "nemico" della stabilità, in quanto riduce il margine di fase
- ② Occorrerà quindi che il regolatore  $R(s)$  introduca un anticipo di fase attorno ad  $\omega_c$  per garantire la stabilità
- ③ Tramite il criterio di Bode è relativamente agevole comprendere come eventuali modifiche ad  $R(s)$  (equivali a  $G(s)$ ) influenzano la stabilità del sistema retroazionato

## - PRESTAZIONI STATICHE

- In generale, è auspicabile che, a transitorio esaurito, l'errore  $e = y^0 - y$  sia piccolo
- Valutiamo questo errore a fronte di variazioni a scalino di  $y^0$ ,  $d_p$ ,  $d_r$ , mediante il th. del valore finale

## d) Errore dovuto al riferimento

$$\frac{E(s)}{Y(s)} = \frac{1}{1+L(s)} = S(s) \quad \text{funzione di sensitività}$$

sia  $L(s) = \frac{\mu}{s^g} \cdot (\dots)$  forma  $\mu/cdt$

$$g = \# \text{integratori } R + \# \text{integratori } G ; \mu = \mu_R \cdot \mu_G$$

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot S(s) \cdot \frac{1}{s} = S(0)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{s^g + \mu} = \begin{cases} \frac{1}{1+\mu} & \text{se } g=0 \\ 0 & \text{se } g > 0 \\ 1 & \text{se } g < 0 \end{cases}$$

- Se non c'è azione integrale, l'errore è finito; cosa diversa di  $\mu$
- Se c'è azione integrale, l'errore è zero
- Se  $L(s)$  ha poli nell'origine l'uscita non si muove ( $y(\infty)=0$ )

b) Errore dovuto al disturbo sul processo

$$\frac{E(s)}{Dp(s)} = \frac{H(s)}{1+L(s)} = H(s) \cdot S(s)$$

$$H = \frac{\mu_H}{s g h}$$

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s H(s) S(s) \stackrel{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} H(s) S(s) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \mu_H \frac{s^{g-g_h}}{s^g + \mu} = \begin{cases} \frac{\mu_H}{1+\mu} & \text{se } g = g_h = 0 \\ \frac{\mu_H}{\mu} & \text{se } g = g_h > 0 \\ 0 & \text{se } g > g_h \end{cases}$$

- Di nuovo l'errore diventa piccolo per  $\mu$  elevati, e si annulla in presenza di "sufficiente" azione integrale

c) Errore dovuto al disturbo di retroazione

$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = F(s) = \frac{Y(s)}{Y^0(s)}$$

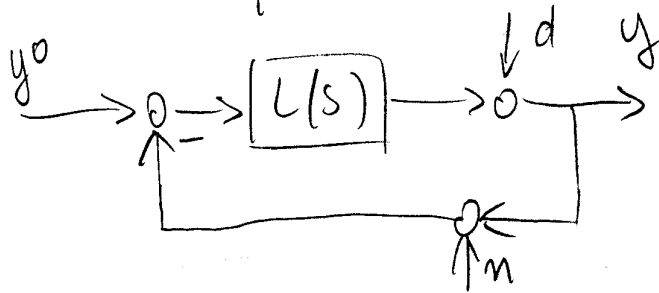
$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{L(s)}{1+L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu}{s^g + \mu} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\mu}{1+\mu} \approx 1 & \text{se } g = 0 \\ 1 & \text{se } g > 0 \end{cases}$$

- Gli errori statici di misura si ripercuotono inevitabilmente sulla precisione statica del sistema

- PRESTAZIONI DINAMICHE

Schema di riferimento:



Valutiamo le f.d.t.

$\frac{Y(s)}{Y^0(s)}$	$\frac{Y(s)}{D(s)}$	$\frac{Y(s)}{N(s)}$
inseguimento setpoint	reiezione disturbi onda	reiezione disturbi retroazione

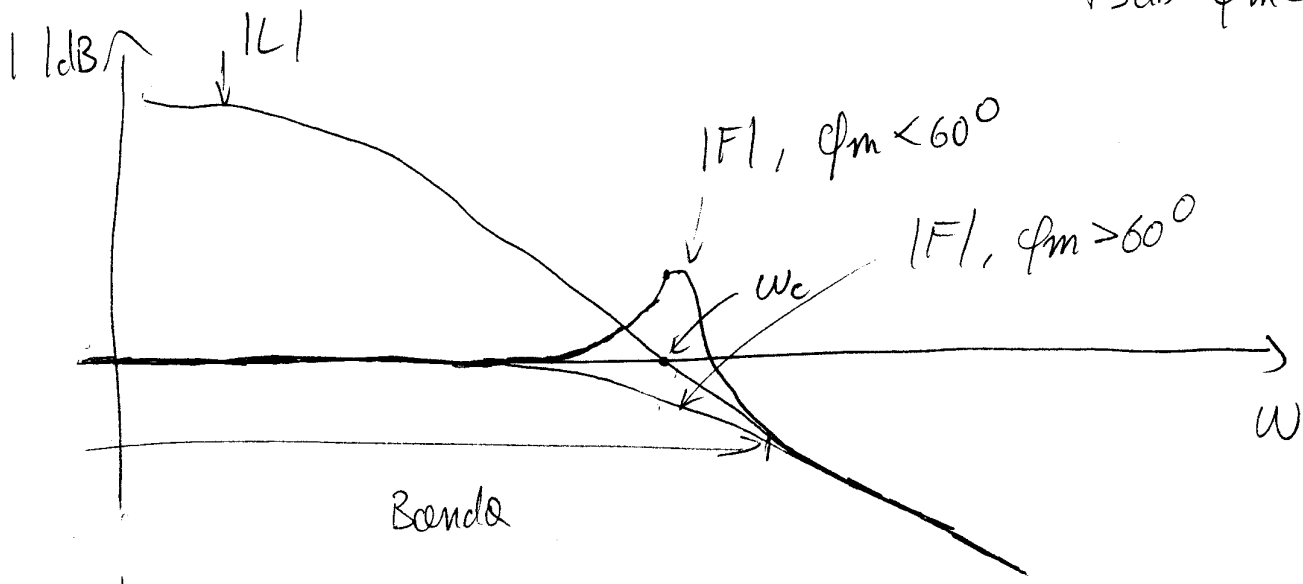
- INSEGUIMENTO DEL SETPOINT

$$F(s) = \frac{Y(s)}{Y^0(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

→ Supponiamo che  $L(s)$  soddisfi le hp. di applicabilità del criterio di Bode

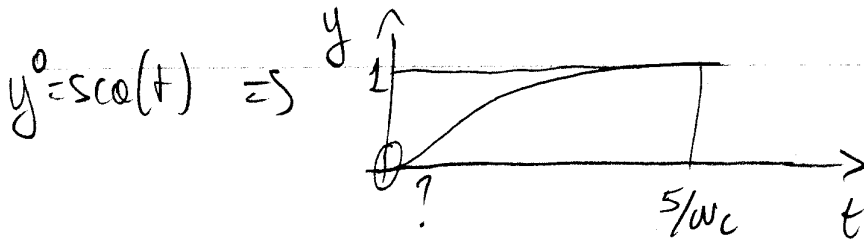
$$|F(j\omega)| \approx \begin{cases} 1 & \text{per } |L(j\omega)| \gg 1, \text{ cioè } \omega \ll \omega_c \\ |L(j\omega)| & \text{per } |L(j\omega)| \ll 1, \text{ cioè } \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{|1 + e^{j\phi_c}|} = \frac{1}{2 \sin \frac{\phi_m}{2}} = \begin{cases} -3\text{dB} & \phi_m = 90^\circ \\ 0\text{dB} & \phi_m = 60^\circ \\ +3\text{dB} & \phi_m = 40^\circ \end{cases}$$



- Caso (A)  $\phi_m > 60^\circ \Rightarrow F(s) \sim \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_c}}$

La risposta del sistema in prima approssimazione assomiglia ad un passa-basso del 1° ordine, con costante di tempo  $T = \frac{1}{\omega_c}$  e  $T_{ass} = \frac{5}{\omega_c}$

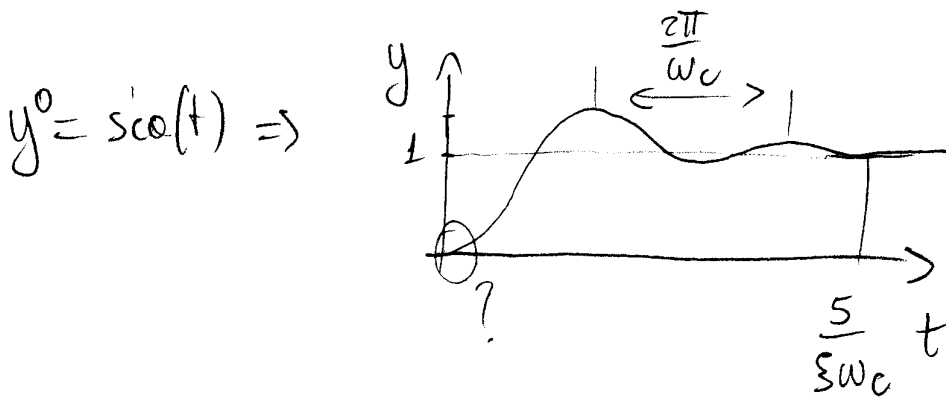


Ovviamente l'andamento iniziale dipende dal comportamento in alta frequenza di  $F(s)$  che non è catturato dall'approssimazione

- Caso (B)  $\phi_m < 60^\circ \Rightarrow F(s) \sim \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$

La risposta del sistema assomiglia ad un passa-basso con due poli complessi coniugati; risulta

$\omega_n \simeq \omega_c$        $\xi = \sin \frac{\phi_m}{2} \simeq \frac{\phi_m}{100}$        $T_{ass} \simeq \frac{5}{\xi \omega_c}$



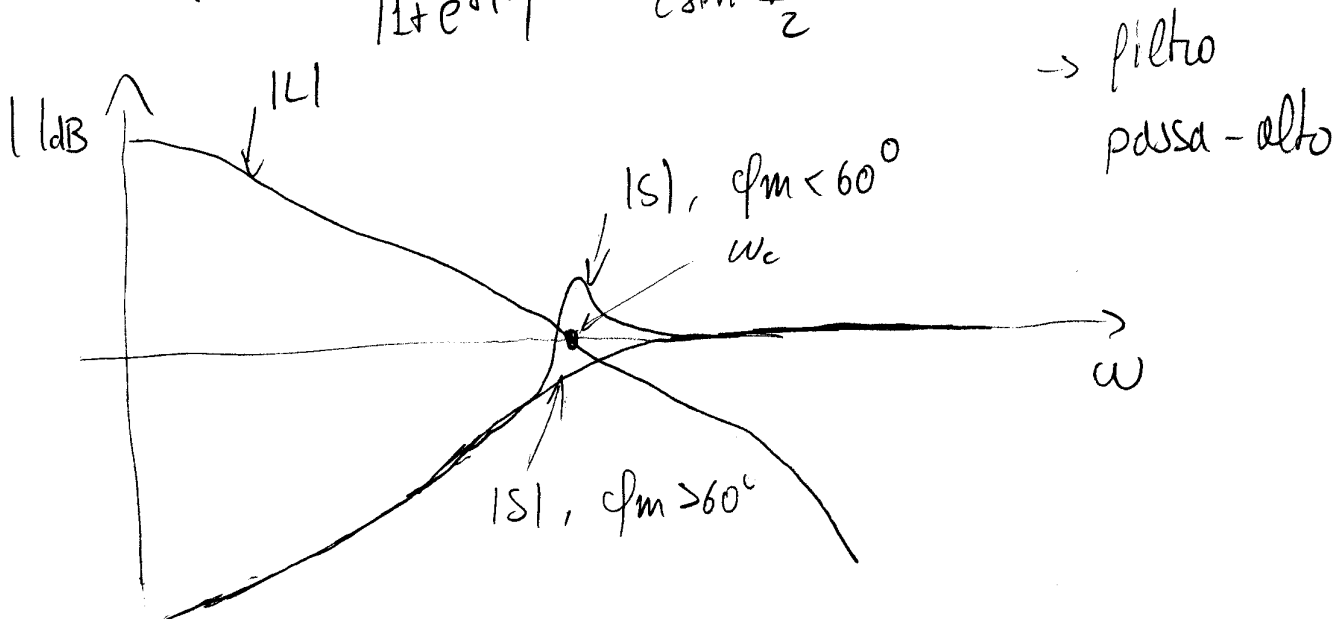
- Def: Banda del sistema di controllo: intervallo di frequenze in cui  $-3\text{dB} < |F(j\omega)|_{\text{dB}} < +3\text{dB}$
- In pratica la banda si può approssimare con l'intervallo  $0 \longleftarrow \omega_c$
- Le componenti di  $y(t)$  a pulsazioni inferiori ad  $\omega_c$  vengono inseguite fedelmente, quelle a pulsazioni superiori vengono attenuate
- Se  $\phi_m$  è basso (meno di  $40^\circ$ ) il sistema di controllo presenta un picco di risonanza marcato nello risposta in frequenza  $F(j\omega)$ , che è indesiderabile

- REIEZIONE DISTURBO LINEA ANDATA

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1+L(s)} = S(s) \quad (\text{funzione di sensitività})$$

$$|S(j\omega)| \approx \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} & \text{per } |L(j\omega)| \gg 1, \text{ cioè } \omega \ll \omega_c \\ 1 & \text{per } |L(j\omega)| \ll 1, \text{ cioè } \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

$$|S(j\omega_c)| = \frac{1}{|1+e^{j\phi_m}|} = \frac{1}{2 \sin \frac{\phi_m}{2}}$$

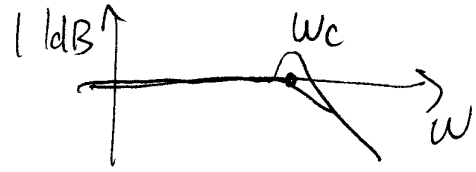


- Le componenti di  $d(t)$  a pulsazioni inferiori ad  $\omega_c$  vengono attenuate, tanto più quanto più è alto il guadagno d'anello  
 quelle invece a pulsazioni  $> \omega_c$  passano sostanzialmente invariate  
 se  $\phi_m$  è basso, le componenti a pulsazioni  $\sim \omega_c$  sono addirittura amplificate

→ In sintesi, vengono attenuate solo le componenti armoniche del disturbo all'interno della banda del sistema

- REIEZIONE DEL DISTURBO IN LINEA DI RETROAZIONE

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = - \frac{L(s)}{1+L(s)} = -F(s)$$



- A parte il segno, è la stessa fdt tra setpoint e uscita

→ Le componenti di  $n(t)$  in banda vengono inseguite con precisione, quelle a frequenze più elevate vengono attenuate come  $L(j\omega)$

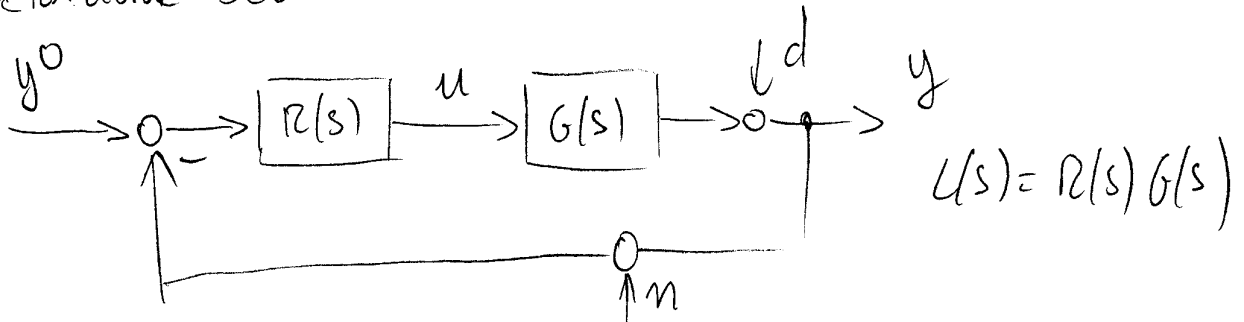
- In presenza di disturbi rilevanti ad alta frequenza, è opportuno limitare la banda ed avere bassi  $|L(j\omega)|$  alle frequenze del disturbo

- In generale le prestazioni di inseguimento del setpoint e quelle di reiezione dei disturbi di misura sono in conflitto tra loro, ed occorre raggiungere un compromesso accettabile

- Se si richiedono prestazioni spinte in termini di inseguimento del setpoint e/o di reiezione del disturbo d'ondata, occorre che il sensore abbia un basso livello di rumore anche ad alta frequenza



- MODERAZIONE DEL CONTROLLO



$$U(s) = R(s)G(s)$$

- Consideriamo ora il segnale di controllo u

$$\frac{U(s)}{Y^0(s)} = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{R(s)}{1 + L(s)} \triangleq Q(s) \quad \text{sensibilità del controllo}$$

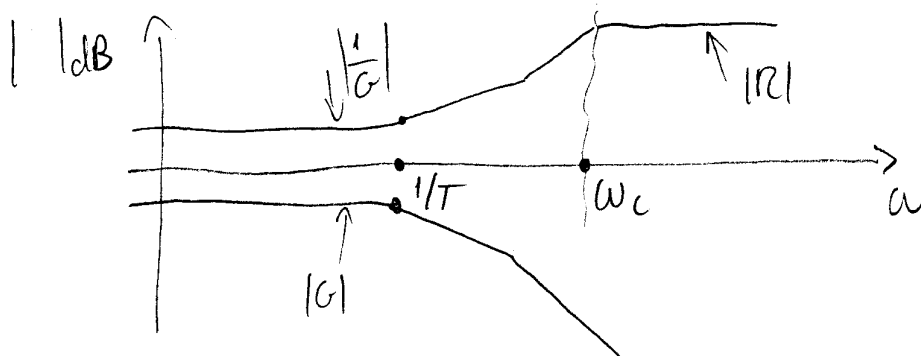
$$\frac{U(s)}{D(s)} = \frac{U(s)}{N(s)} = -Q(s) \Rightarrow \text{in modulo, le fct } \begin{matrix} y^0 \rightarrow \\ d \rightarrow \\ n \rightarrow \end{matrix} \text{ sono le stesse}$$

- In generale, è opportuno che  $|Q(j\omega)|$  non sia mai troppo grandi, per evitare eccessive sollecitazioni del controllo

$$|Q(j\omega)| \approx \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|} & \text{per } \omega \ll \omega_c \\ |R(j\omega)| & \text{per } \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

① È opportuno che  $|R(j\omega)|$  sia contenuta in alta frequenza

② Se  $G(s)$  è di tipo passa-basso, con un polo dominante di costante di tempo  $T$ , non si può spingere  $\omega_c$  troppo oltre  $\frac{1}{T}$  se non si vuole che



$|Q(j\omega)|$  si alzi troppo intorno ad  $\omega_c$

## - OSSERVAZIONI IMPORTANTI

- ① Nell'ipotesi di validità del criterio di Bode, è possibile valutare approssimativamente le prestazioni dinamiche del sistema da due soli parametri di  $L(j\omega_c)$ , cioè  $\omega_c$  e  $\phi_m$
- ② È evidente che la presenza di poli/zeri addizionali con  $\omega = \frac{1}{T} \gg \omega_c$  non può alterare significativamente la pulsazione critica  $\omega_c$ , e non può alterare più di tanto il margine di fase: termini del tipo  $\arctan(\omega_c T)$  quando  $\frac{1}{T} \geq 10 \omega_c$  valgono meno di  $6^\circ$
- Pertanto le dinamiche a frequenza  $\gg \omega_c$  sono influenti sulle prestazioni dinamiche del controllo, e possono quindi essere trascurate nella descrizione del processo tramite  $G(s)$ ; in altre parole, la dinamica significativa di fini del controllo va da 0 rad/s (prestazioni statiche) a circa  $10 \omega_c$
- ③ Se il margine di fase è sufficientemente elevato, è evidente che variazioni del  $10 \div 20\%$  nel guadagno e nelle costanti di tempo di  $G(s)$  non mutano sostanzialmente la stabilità e le prestazioni statiche e dinamiche del sistema di controllo. In questo caso, quindi, le prestazioni sono "robuste" rispetto all'incertezza parametrica sulla dinamica del processo da controllare

## - PROGETTO DEL REGOLATORE

- L'analisi condotta ha evidenziato che le prestazioni del sistema di controllo dipendono dalla funzione d'anello  $L(s)$

- guadagno, tipo  $\rightarrow$  prestazioni statiche
- $\omega_c$ ,  $\phi_m$   $\rightarrow$  prestazioni dinamiche

- Ora, supponendo che il processo e la strumentazione (e quindi  $G(s)$ ) siano dati, il progetto del regolatore consiste nel trovare  $R(s)$  tale per cui  $L(s) = R(s)G(s)$  rispetta le specifiche del sistema di controllo.

- Tratteremo qui il problema in termini generali; affrontando poi in specifico il progetto di regolatori PID

## - SISTEMI A FASE MINIMA

- Sia  $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\tau s}$        $N(s), D(s)$  polinomi  
 $\operatorname{Re}(p) < 0$  ( $\rightarrow$  hp criterio Bode)

Il termine  $e^{-\tau s}$  corrisponde ad un ritardo puro addizionale (oltre alla dinamica descritta da  $\frac{N(s)}{D(s)}$ ) tra ingresso e uscita

ad es. se  $y(t) = u(t - \tau)$

$$Y(s) = \underbrace{e^{-\tau s}}_{G(s)} U(s)$$

# SISTEMA CONTROLLO

(20)

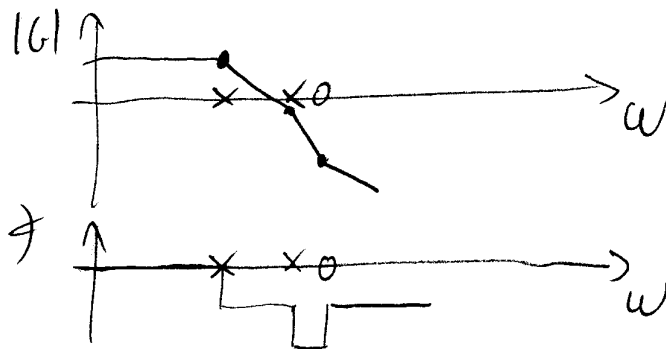
- Def  $G(s)$  ha fase minima se  $\text{Re}(z_i) < 0$ ,  $\tau = 0$   
 ovvero  
 no zeri positivi, no ritardo

$G(s)$  ha fase non minima altrimenti  
 ovvero  
 $\exists$  zeri positivi e/o  $\exists$  ritardo

- Proprietà dei diagrammi di Bode (asintotici)

• fase minima  $\nexists G(j\omega)|_{\text{asintotico}} = \frac{90^\circ}{20 \text{ dB/dec}} \frac{d|G(j\omega)|_{\text{dB}}}{d\omega}$

diagramma fase  $\leftrightarrow$  pendenza diagramma modulo



• fase non minima  $\nexists G(j\omega)|_{\text{asint.}} \leq \frac{90^\circ}{20 \text{ dB/dec}} \frac{d|G(j\omega)|_{\text{dB}}}{d\omega}$

il contributo di zeri positivi e del ritardo dà uno spostamento negativo più grande rispetto al caso a fase minima

- PROGETTO DI PASSIVA - CASO AFASE MINIMA

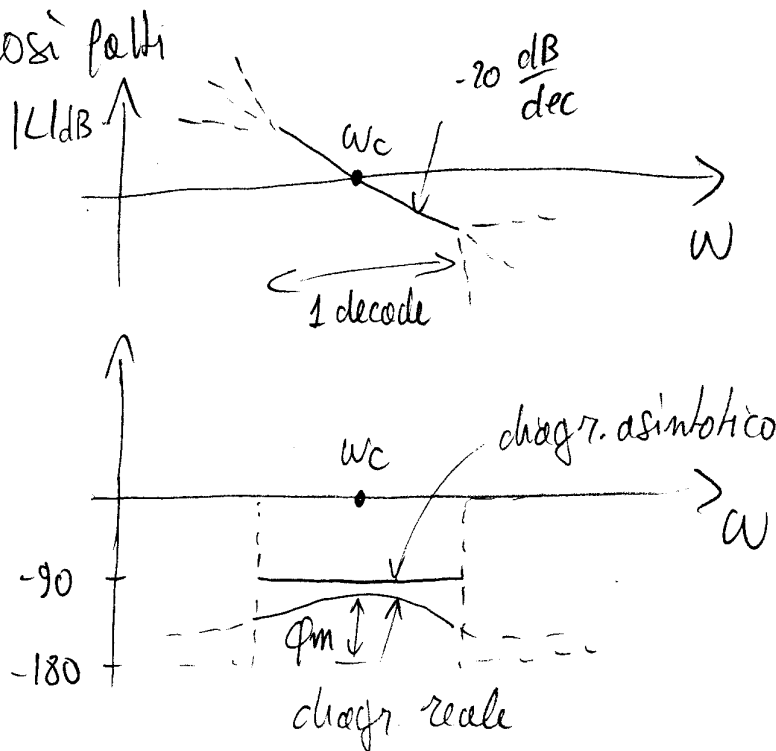
- Supponiamo  $G(s)$  a fase minima
- Costruiamo  $R(s)$  a fase minima (poli e zeri  $Re < 0$ )

→  $L(s)$  ha fase minima

- Scegliendo opportunamente guadagno, poli e zeri di  $R(s)$  è sempre possibile:

① Fare si che  $L(s)$  abbia guadagno e tipo tali da rispettare le specifiche statiche: errore a transitorio esaurito piccolo o addirittura nullo, introducendo poli nell'origine in  $R(s)$

② Fare si che i diagrammi di Bode di  $L(s)$  siano così fatti



- Se il diagramma del modulo taglia l'asse 0dB con  $-20 \frac{dB}{dec}$  di pendenza, e la mantiene per un tratto lungo almeno una decade, il diagramma della fase sarà prossimo di  $90^\circ$ , e quindi anche  $\phi_m \sim 90^\circ$
- In linea di principio si può ottenere un  $\omega_c$  (e quindi prestazioni dinamiche) arbitrariamente veloce; in pratica al crescere di  $\omega_c$ 
  - cresce  $|Q(s)| \Rightarrow$  cresce l'intensità del controllo
  - si allarga la banda di  $\frac{Y(s)}{N(s)} \Rightarrow$  maggiore riproduzione delle componenti ad alta frequenza nel rumore di misura
- NB: è possibile che quando si forma la funzione d'anello  $L(s) = R(s)G(s)$ 
  - poli di  $G$  si cancellino con zeri di  $R$
  - zeri di  $G$  si cancellino con poli di  $R$

ora, per ipotesi  $R(s)$  e  $G(s)$  hanno fase minima  
 se quindi si evitano cancellazioni polo/zero nell'origine,  
 le dinamiche nascoste che si creano hanno  $\text{Re}(p) < 0$ ,  
 cioè sono asintoticamente stabili, e non creano problemi

- PROGETTO DI MASSIMA - CASO A FASE NON MINIMA

→ Supponiamo  $G(s) = G_{pm}(s) \cdot G'(s)$

$\uparrow$   
 parte a fase  
 minima

$\uparrow$   
 ritardi  
 zero positivi

- Il termine  $G'(s)$  non può essere cancellato da  $R(s)$

- Non posso cancellare uno zero  $(1-s\tau)$  con un polo  $\frac{1}{1-s\tau}$  perché creerei una dinamica nascosta instabile
- Non posso cancellare il ritardo  $e^{-\tau s}$  perché mi occorrerebbe un anticipo puro  $e^{+\tau s}$  (un oracolo, o un veggente) che non è fisicamente realizzabile

$\Rightarrow L(s) = L_{pm}(s) \cdot G'(s)$

$$\phi_c = \angle L(j\omega_c) = \angle L_{pm}(j\omega_c) + \angle G'(j\omega_c)$$

$\uparrow$   
 $\approx -90^\circ$  perché  
 il diagramma  
 del modulo  
 scende di  $-20 \text{ dB/dec}$

$\uparrow$   
 sfasamento addizionale  
 ineliminabile

- Supponiamo di richiedere  $\phi_m > 40^\circ$

$\Rightarrow \phi_m = 180^\circ - |\phi_c| = 180^\circ + \phi_c \approx 90^\circ + \angle G'(j\omega_c)$

$\uparrow$  negativo

① zero positivo  
(1-sτ)

$$\phi_m = 90^\circ - \arctan(\omega_c \tau) > 40^\circ$$

$$\arctan(\omega_c \tau) < 50^\circ$$

$$\boxed{\omega_c < \frac{1.2}{\tau}}$$

② Ritardo  
 $e^{-\tilde{\tau}s}$

$$\phi_m = 90^\circ + \angle e^{-j\omega_c \tilde{\tau}} = 90^\circ - \frac{180}{\pi} \omega_c \tilde{\tau} > 40^\circ$$

$$\omega_c \tilde{\tau} < \frac{50}{180} \pi$$

$$\boxed{\omega_c < \frac{0.87}{\tilde{\tau}}}$$

-> In ogni caso è impossibile che la banda del sistema superi in maniera sostanziale la barriera  $\frac{1}{\tau}$

- la presenza di fenomeni a fase non minima (ritardi, zeri positivi) nel processo da controllare può limitare drasticamente la velocità di risposta e le prestazioni dinamiche in genere del sistema di controllo (cfr il caso della regolazione di temperatura della doccia, dove era presente un ritardo)

=> Se questo non permette di soddisfare le specifiche richieste non si può più intervenire su  $R(s)$  ma occorrerà riprogettare il processo da controllare in modo da ridurre o eliminare i fenomeni a fase non minima

- In generale quindi si può dire che il controllo di sistemi a fase non minima è "difficile"



## SISTEMA CONTROLLO

(25)

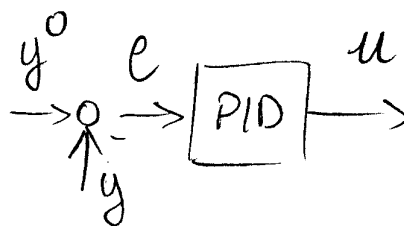
- In un certo senso sono "difficili" da controllare anche sistemi a fase minima, ma caratterizzati da poli molto lenti (con costanti di tempo elevate). In questo caso però non esistono "barriere" invalicabili per la banda del sistema di controllo; piuttosto, l'azione della variabile di controllo e l'effetto del rumore di misura diventeranno progressivamente più forti all'aumentare di  $\omega_c$ , fino a risultare "praticamente" inaccettabili.

## - INTRODUZIONE

- In linea di principio, il regolatore  $R(s)$  può avere una dinamica complessa, descritta da molti poli e zeri.
- In pratica, però, un numero molto rilevante di problemi di controllo di interesse pratico è risolvibile con una classe particolare di regolatori detti PID (Proporzionale - Integrale - Derivativo)

## - PID IDEALE

- Descrizione nel dominio del tempo



$$u(t) = \underbrace{K_p \cdot e(t)}_{\text{parte proporzionale}} + \underbrace{K_I \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\text{parte integrale}} + \underbrace{K_D \cdot e'(t)}_{\text{parte derivativa}}$$

$K_p$ : costante proporzionale

$K_I$ : " integrale

$K_D$ : " derivativa

Possibili sottocasi P, I, PI, PD se si azzerano alcune costanti

- Descrizione nel dominio della frequenza

$$U(s) = \left( K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) E(s)$$

o alternativamente

$$U(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) E(s)$$

$T_i$ : tempo integrale

$T_d$ : tempo derivativo

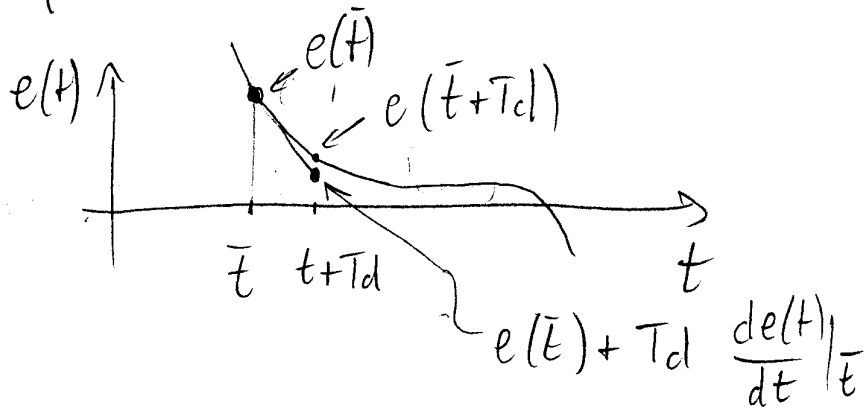
# REGOLATORI PID

(2)

- Il termine integrale garantisce errore nullo a transitorio esaurito (cfr prestazioni statiche): l'unico modo per avere  $\int_0^t e(\tau) d\tau$  costante a regime è che  $e(t) \rightarrow 0$   
 da solo però non è sufficiente (di solito) perché introduce un ritardo di fase di  $90^\circ$  a tutte le  $\omega$ , che può destabilizzare la dinamica ad anello chiuso

- Il termine proporzionale permette di recuperare fase in media frequenza (vedremo perché)

- Il termine derivativo introduce un anticipo nella risposta, utile a compensare gli sfasamenti negativi dei poli del processo; la derivata di  $e(t)$  mi dice in anticipo "dove andrà a finire" l'errore



# REGOLATORE PID

(3)

## - PID REALE

- la fct del PID ideale vale

$$R(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) = K_p \frac{1 + sT_i + s^2 T_i T_d}{sT_i} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ zeri} \\ 1 \text{ polo nell'origine} \end{array}$$

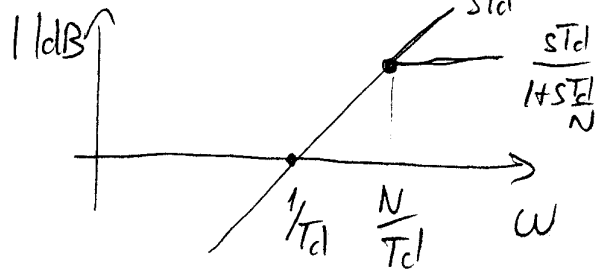
#zeri > #poli  $\Rightarrow$  fct impropria, non realizzabile

- Il problema è causato dal termine derivativo puro, che risponderebbe con un impulso ad un ingresso a scalino

- si risolve il problema approssimando il termine derivativo

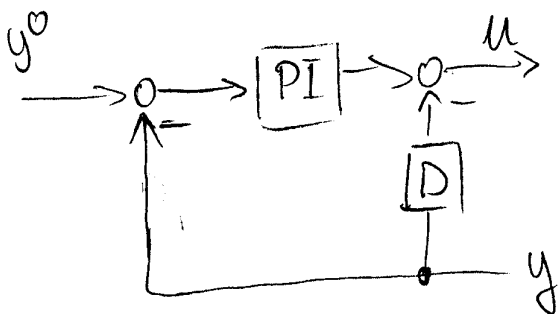
$$sT_d \rightarrow \frac{sT_d}{1 + s\frac{T_d}{N}}$$

$$N = 3 \div 30$$



- la fct del PID reale risulta quindi  $R(s) = K_p \frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}{sT_i (1+s\frac{T_d}{N})}$

- Esistono poi numerosissime varianti del PID reale: ad esempio



In questo modo la parte derivativa è presente nell'anello (dove introduce anti-ipo di fase per migliorare pm), ma non

sul riferimento, per evitare picchi di  $u(t)$  quando  $y^0(t)$  varia bruscamente

- Una trattazione esaustiva va però oltre gli obiettivi del corso

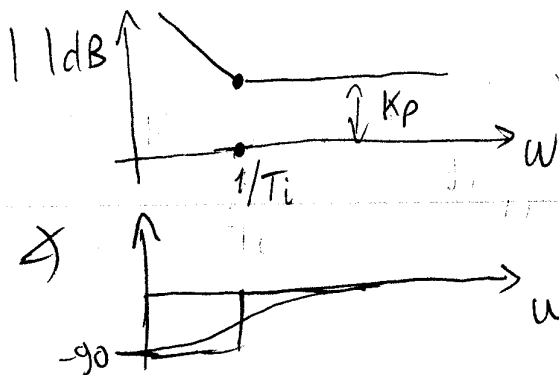
# REGOLATORI PID

(4)

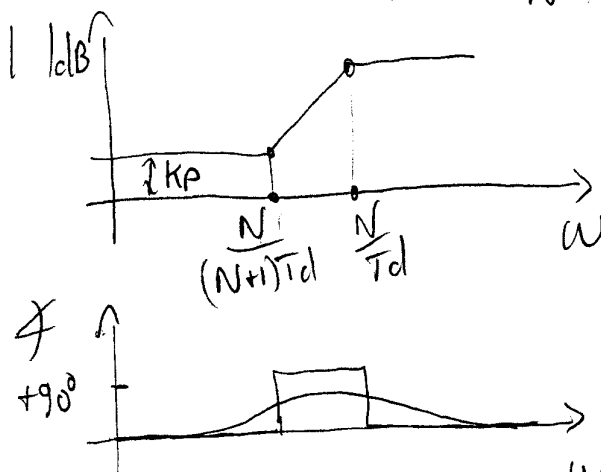
## - CASI PARTICOLARI

• P  $R(s) = K_p$

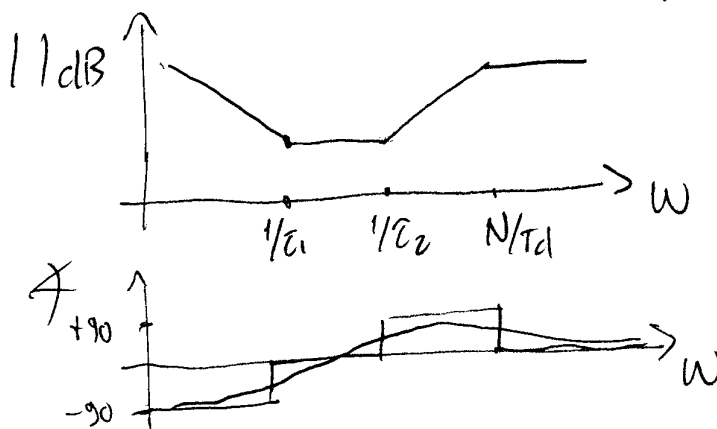
• PI  $R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right) = K_p \frac{1+sT_i}{sT_i}$  1 zero  
1 polo origine (integratore)



• PD (reale)  $R(s) = K_p \left(1 + \frac{sT_d}{1+sT_d/N}\right) = K_p \frac{1+sT_d \frac{N+1}{N}}{1+s\frac{T_d}{N}}$  1 zero  
1 polo alta frequenza



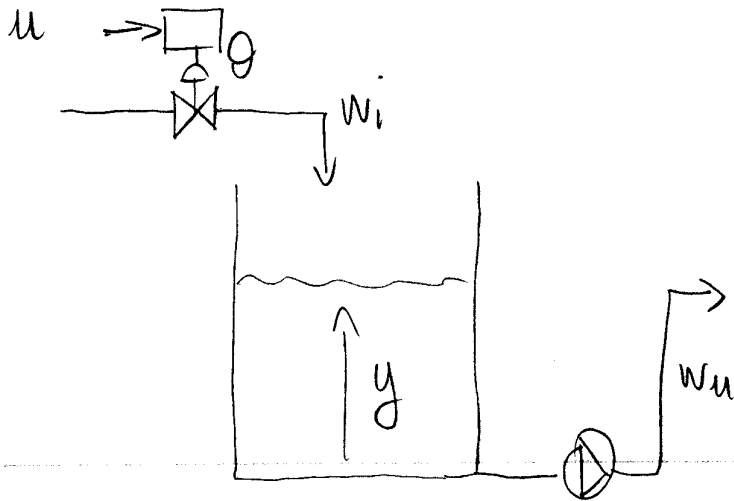
• PID (reale)  $R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1+sT_d/N}\right) = K_p \frac{(1+sT_i)(1+sT_d)}{sT_i(1+sT_d/N)}$  2 zero  
1 polo origine  
1 polo alta frequenza



## - PROGETTO DEL REGOLATORE PID - GENERALITÀ

- Se è richiesto errore statico nullo si introduce la parte I, altrimenti si cerca di rendere piccolo l'errore statico alzando la costante  $K_p$  (che diminuisce il fattore  $\frac{1}{1+U_L(s)}$ )
- Se si è introdotta la parte I, si tara  $T_i$  in modo che lo zero porti ad avere un  $\phi_m$  soddisfacente
- Regolatori senza parte D non possono introdurre anticipo di fase a nessuna frequenza: Se la banda richiesta è  $\bar{\omega}_c$ , e  $\angle G(j\bar{\omega}_c) < -180 + \phi_m$ , non riesco a rispettare la specifica. Introducendo la parte D si possono guadagnare fino a  $90^\circ$  di margine di fase, in modo da soddisfare la specifica (purché  $\angle G(j\bar{\omega}_c) > -270 + \phi_m$ ).  
 Puraltro la parte D comporta  $|R(s\omega)|$  alto ad  $\omega \geq \omega_c$ , e quindi  $|Q(s\omega)|$  grande ad alta frequenza: se la misura è affetta da rumore (componenti significative ad alta frequenza),  $u(t)$  tenderà a muoversi molto nervosamente  
 → la parte D si usa con parsimonia, e si evita in tutti i casi in cui è possibile

## - CONTROLLO DI LIVELLO IN UN SERBATOIO



- Var. di controllo: comando al servomeccanismo della valvola
- Disturbo: portata aspirata  $w_u$
- Var. controllata: livello

## - Analisi della dinamica del processo

- equazione conservazione massa + transf. di Laplace

$$Y(s) = \frac{1}{\rho A s} w_i(s) - \frac{1}{\rho A s} w_u(s)$$

- dinamica dell'attuatore

- Una valvola servocomandata è a sua volta un sistema controllato (servocomando)



- l'azionamento può essere pneumatico o elettrico

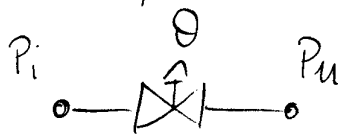
- In ogni caso, se il sistema lavora in modo lineare, possiamo descriverlo agli effetti esterni con un modello semplificato

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta^o(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\omega_{ca}} s} \quad \text{dove } \omega_{ca} \text{ è la banda del servocomando}$$

NB questo modello è valido per  $\omega < 2:3 \omega_c$ , a frequenze più alte non descrive più la dinamica dell'attuatore in modo credibile

- Relazione  $\Theta \leftrightarrow \omega$

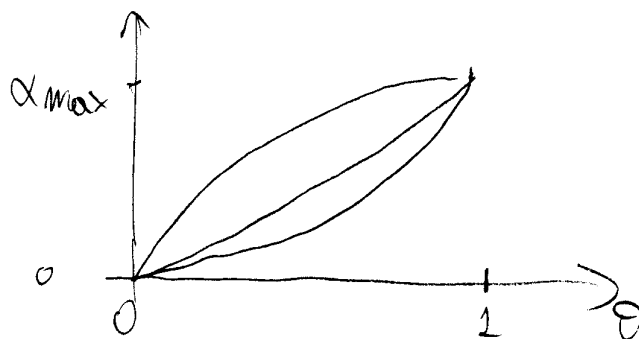
Il funzionamento della valvola può essere descritto dall'equazione



$$\omega = K_v(\theta) \sqrt{2\rho (P_i - P_u)}$$

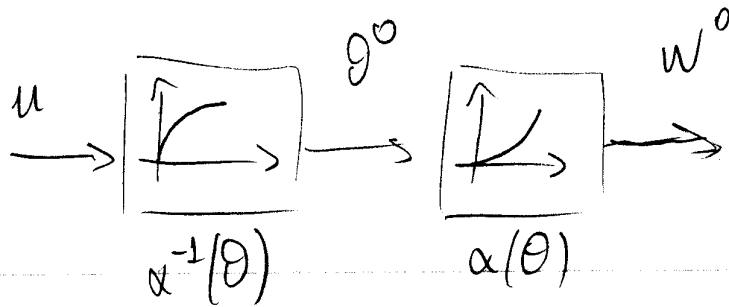
se supponiamo  $P_i = \text{cost}$ ,  $P_u = \text{cost}$ , si ha  $\boxed{\omega = \alpha(\theta)}$

la forma di  $K_v(\theta)$ , e quindi di  $\alpha(\theta)$ , viene a seconda delle caratteristiche costruttive





- In generale si può ottenere una caratteristica lineare anteponendo un elemento nonlineare con andamento opportuno



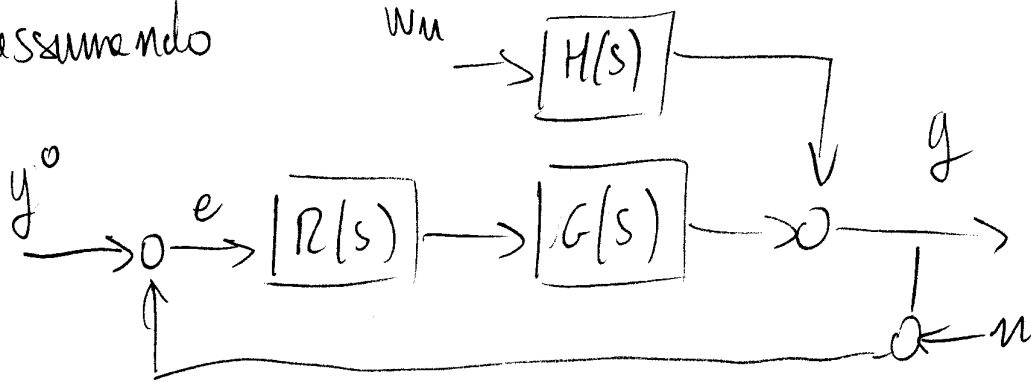
- E' quindi possibile ottenere una relazione lineare tra la var. di controllo  $u$  e la portata  $w$ :

$$\frac{W_i(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + sT_a}$$

#### • dinamica del sensore

I sensori di livello possono basarsi su svariate tecnologie (sensori di pressione piezoresistivi, sensori ad ultrasuoni, galleggianti, etc.). In generale comunque la dinamica è molto più rapida delle dinamiche desiderate del livello quindi si può assumere  $T(s) = 1$

- Prossimamente



$$G(s) = \frac{1}{\rho A s} \cdot \frac{1}{1 + s T_a}$$

$$H(s) = - \frac{1}{\rho A s}$$

- Supponiamo di dover far fronte a variazioni a scalino del disturbo  $w_u$ , o eventualmente del livello desiderato  $e^0$

$$y^0 = A \cdot \text{sc}(t) \quad w_u = B \cdot \text{sc}(t)$$

- PROGETTO REGOLATORE P

$$R(s) = K_p \quad L(s) = \frac{K_p}{\rho A s (1 + s T_a)}$$

• Prestazioni statiche

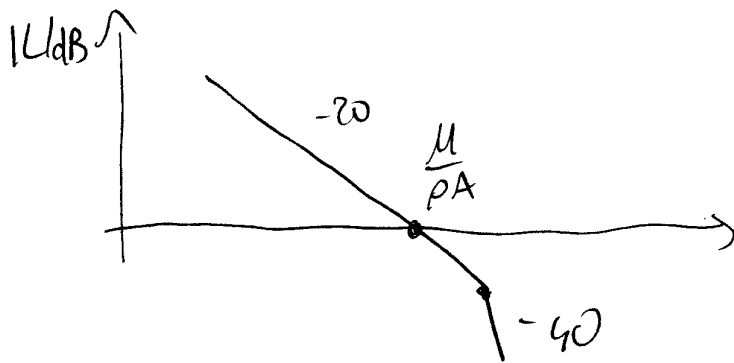
$$e_{\infty y^0} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{A}{s} \cdot \frac{1}{1 + L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1 + \frac{K_p}{\rho A s}} = 0$$

OK

$$e_{\infty w} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{B}{s} \cdot \frac{H(s)}{1 + L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} - \frac{B/\rho A s}{1 + \frac{K_p}{\rho A s}} = \frac{B}{K_p}$$

Accettabile solo se  $B$  è piccolo e  $K_p$  è grande. Se il rumore di misura  $n(t)$  è rilevante, non si può alzare troppo  $K_p$  se si vogliono evitare eccessive sollecitazioni della servovalvole

• Prestazioni dinamiche



$$\omega_c = \frac{K_p}{P A}$$

→ la banda e la velocità di risposta sono proporzionali al guadagno del P

$$\phi_c = -90^\circ - \arctan(\omega_c T_a)$$

$$\phi_m = 180 - |-90^\circ - \arctan(\omega_c T_a)| = 90^\circ - \arctan(\omega_c T_a)$$

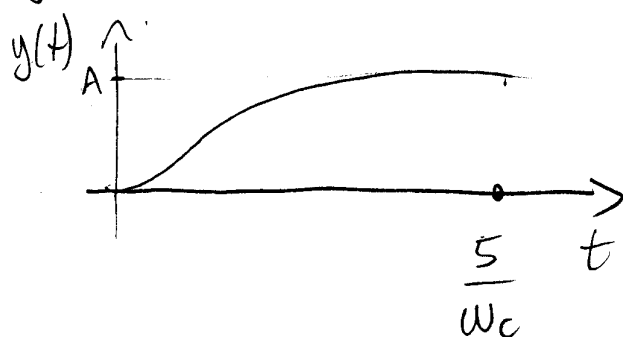
→ il margine di fase è accettabile ( $\phi_m > 45^\circ$ ) se  $\omega_c < \frac{1}{T_a}$

cioè se la velocità di risposta del sistema ed quello di un sistema è minore di quella dell'attuatore

NB sotto questa ipotesi, l'influenza delle dinamiche ad alta frequenza trascurate nel modello dinamico dell'attuatore non sono determinanti

- Risposte a scalino ( $\text{hp } \phi_m > 60^\circ$ )

$$y^0 = A \text{sc}(t)$$



- Il livello si porta al valore desiderato in un tempo  $\frac{5}{\omega_c}$

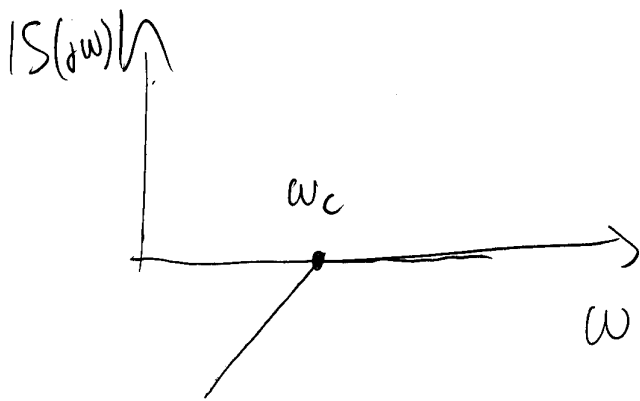
# CASI APPLICATIVI

(6)

$$w_u = B \text{ sca}(t)$$

$$\frac{Y}{w_u} = \frac{H(s)}{1+L(s)} = H(s) \cdot S(s)$$

$$S(j\omega) \approx \begin{cases} \frac{1}{L(j\omega)} & \omega \ll \omega_c \\ 1 & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

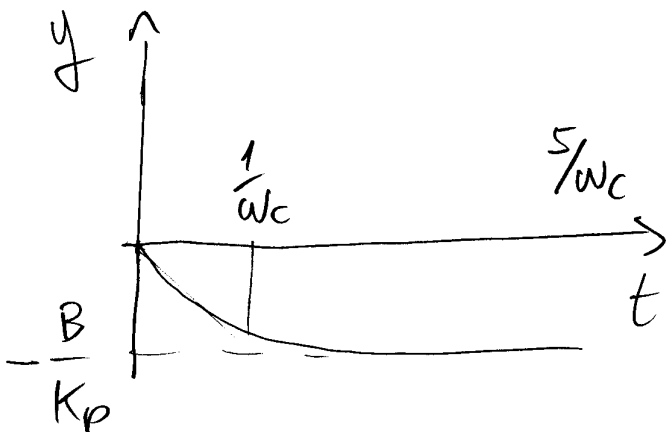


$$\rightarrow S(s) \approx \frac{s/\omega_c}{1 + \frac{s}{\omega_c}}$$

( $\lim_{s \rightarrow \infty} S(s) = 1$ )

$$\frac{Y}{w_u} = H(s) \cdot S(s) \approx -\frac{1}{PA_s} \cdot \frac{\frac{PA}{K_p} s}{1 + \frac{s}{\omega_c}}$$

$$\approx -\frac{1}{K_p} \frac{1}{1 + s/\omega_c}$$



risposta a  $w_u = B \text{ sca}(t)$

## - PROGETTO REGOLATORE PI

- Se le variazioni di  $w_n$  sono molto ampie, e la presenza di rumore suggerisce di alzare troppo  $K_p$ , l'errore statico potrebbe risultare inaccettabile
- Si rimedea aggiungendo azione integrale al regolatore

$$R(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{sT_i} \right) = K_p \frac{1+sT_i}{sT_i}$$

$$L(s) = K_p \frac{1+sT_i}{pAs^2(1+sT_a)}$$

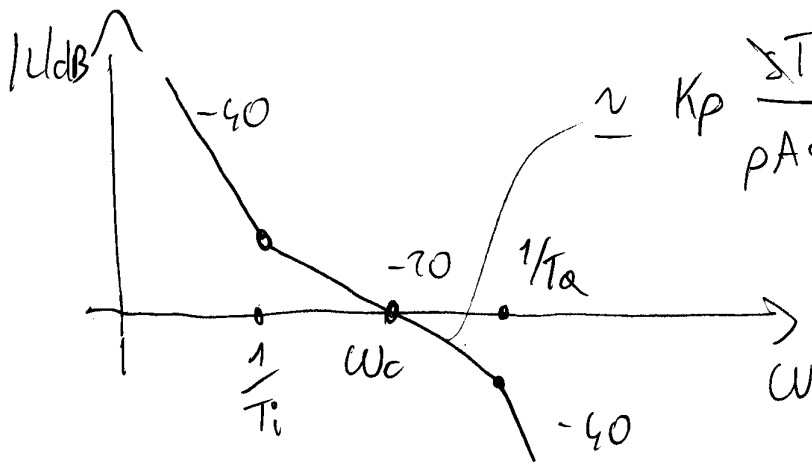
• Prestazioni statiche

$$e_{\infty y^0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1 + \frac{K_p}{pAs^2}} = 0 \quad \checkmark$$

$$e_{\infty w_n} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{B/pAs}{1 + \frac{K_p}{pAs^2}} = 0 \quad \checkmark \quad \text{OK}$$

• Prestazioni dinamiche

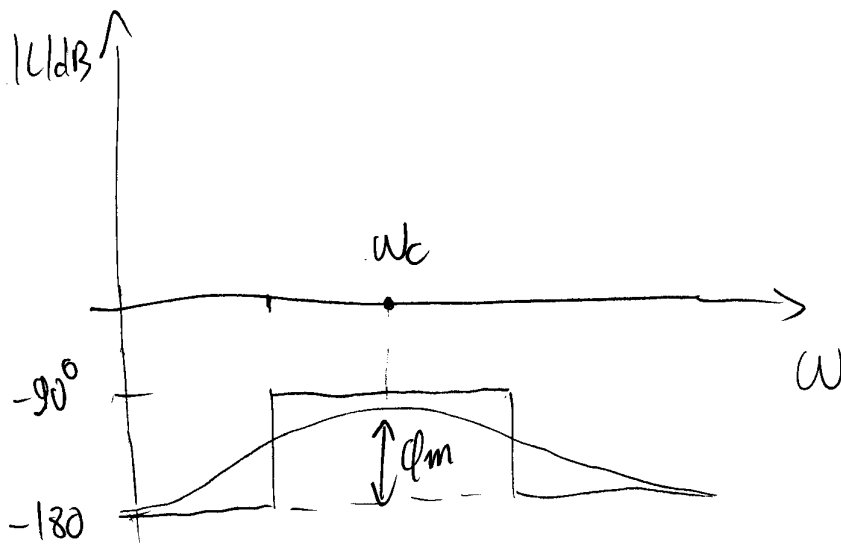
- Il doppio integratore dà un contributo di  $-180^\circ$  a  $L(j\omega)$ ; occorre quindi piazzare lo zero prima di  $\omega_c$ , in modo che dia una forte azione di anticipo di fase



$$\approx K_p \frac{\sum T_i}{P A S^2 T_i} = \frac{K_p}{P A} \cdot \frac{1}{S}$$

$$\omega_c \approx \frac{K_p}{P A}$$

(più o meno come nel caso del P)



$$\varphi_c = -180^\circ + \arctan(\omega_c T_i) - \arctan(\omega_c T_a)$$

$$\varphi_m = +\arctan(\omega_c T_i) - \arctan(\omega_c T_a)$$

# CASI APPLICATIVI

(9)

- Esempio  $T_a = 5 \text{ s}$   $\omega_c = 0.1 \text{ rad/s}$  ( $\Rightarrow \frac{5}{\omega_c} = 50 \text{ s}$ )

$$\varphi_m = 60^\circ$$

$$\varphi_m = \arctan(0.1 T_i) - \arctan(0.5) = 60^\circ$$

$$\arctan(0.1 T_i) = 60^\circ - 27^\circ = 37^\circ$$

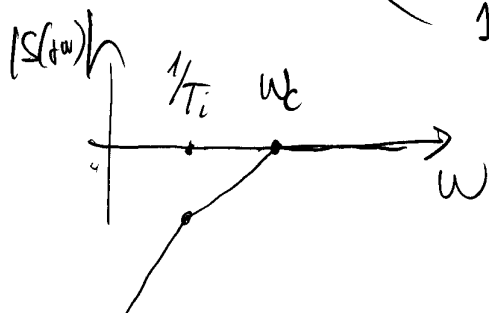
$$T_i = \frac{1}{0.1} \tan 37^\circ = 7.5$$

$$K_p = \omega_c \frac{P_A}{T_i} = \frac{0.1}{7.5} \cdot P_A$$

- Risposta a  $w_u = B \text{ sca}(t)$

$$S(j\omega) \approx \frac{1}{L(j\omega)} \quad \omega \ll \omega_c$$

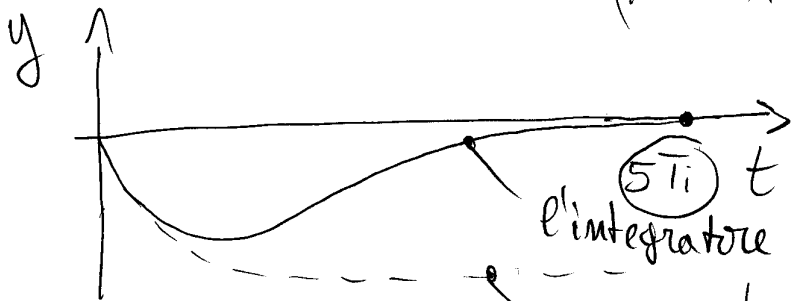
$$\approx 1 \quad \omega \gg \omega_c$$



$$S(s) \approx \frac{s^2 \frac{T_i}{\omega_c}}{(1+sT_i)(1+\frac{s}{\omega_c})}$$

↑  
polo dominante !!

$$\frac{y}{w_u} = H(s)S(s) \approx \frac{1}{P_A s} \frac{\frac{P_A}{K_p} \frac{s}{T_i}}{(1+sT_i)(1+\frac{s}{\omega_c})} \approx \frac{T_i}{K_p} \frac{s}{(1+sT_i)(1+\frac{s}{\omega_c})}$$



l'integratore annulla l'errore statico

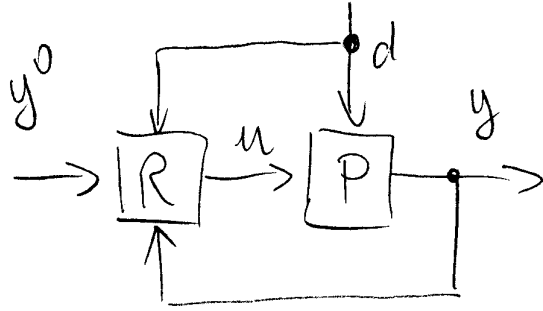
andamento col solo controllo P

## - COMPENSAZIONE DIRETTA DEL DISTURBO

- Negli schemi di controllo P e PI (pura retroazione dell'errore) la reazione del disturbo migliora all'aumentare del guadagno  $K_P$ , e quindi della banda del controllo
  - Supponiamo di trovarci in una situazione caratterizzata da:
    1. disturbi di elevata ampiezza ( $\rightarrow$  grandi variazioni della portata utente  $w_u$ )
    2. livello di rumore del sensore elevato
  - L'aspetto 1) richiede una banda elevata per ottenere una soddisfacente reazione del disturbo
  - L'aspetto 2) sconsiglia invece di aumentare troppo la banda, per evitare eccessive sollecitazioni dell'attuatore dovute al rumore di misura
- $\Rightarrow$  Potrebbe non esistere un compromesso accettabile
- In questi casi si può ricorrere alla compensazione diretta del disturbo, cioè ad una soluzione integrata nello aperto + nello chiuso

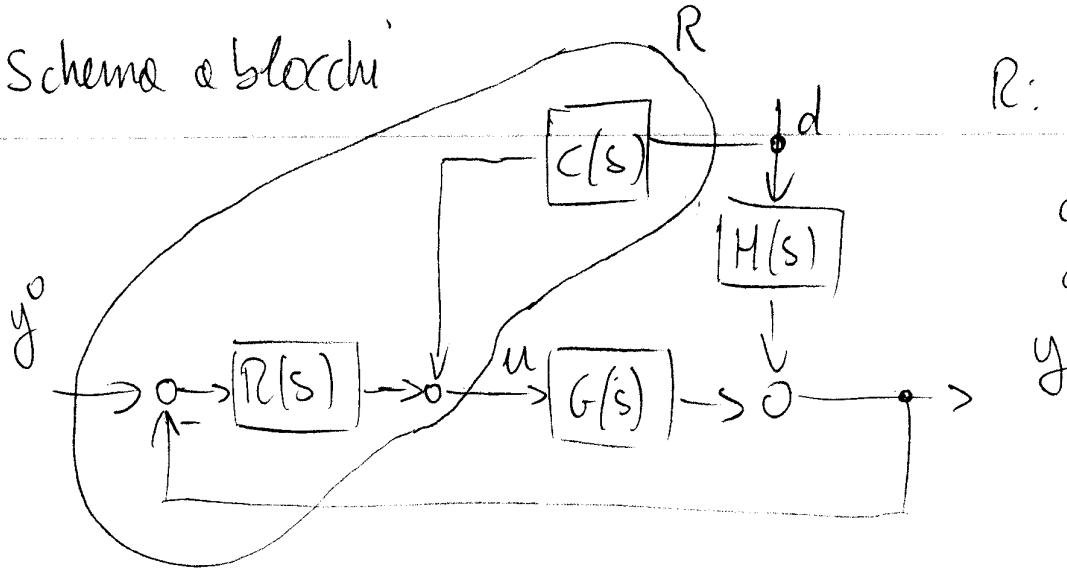


- Schema di principio



• Il regolatore ha accesso ad una misura del disturbo e lo impiega per stabilire l'andamento di  $u(t)$

- Schema a blocchi



R: regolatore con compensazione del disturbo

- Criterio di progetto

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{H(s) + C(s)G(s)}{1 + L(s)}$$

vogliamo  $\frac{Y}{D} \approx 0 \Rightarrow H(s) + C(s)G(s) = 0$

$$C(s) = - \frac{H(s)}{G(s)}$$

- Pro: migliori prestazioni di riezionamento del disturbo
- Contro: occorre un sensore in più (costi, manutenzione...)

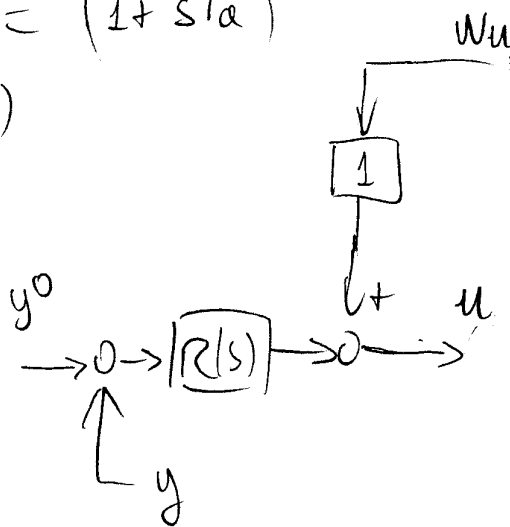
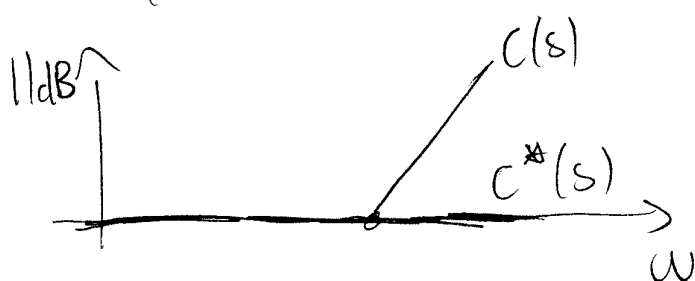
- Osservazioni

- Se la compensazione non è perfetta, il termine  $\frac{1}{1+L(s)}$  dovuto alla retroazione si occupa di ridurre l'errore residuo
- Può capitare che  $C(s)$  abbia più zeri che poli, e che non sia realizzabile fisicamente. In questo caso si introduce una fct  $C^*(s)$  che approssimi  $C(s)$  in bassa frequenza

- Esempio : controllo di livello

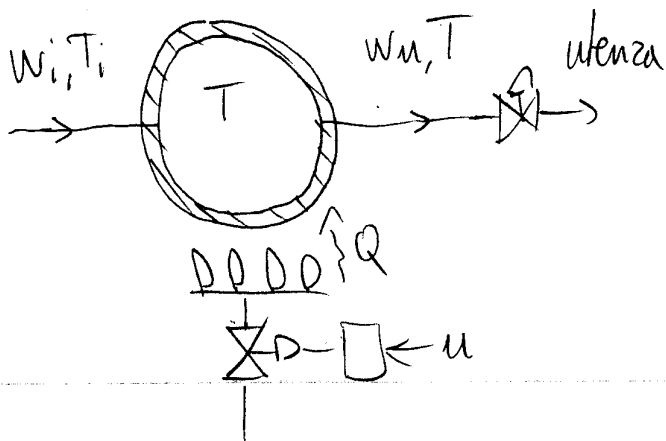
$$C(s) = -\frac{H(s)}{G(s)} = -\frac{-\frac{1}{\rho AS}}{\frac{1}{\rho AS(1+sTa)}} = (1+sTa)$$

$$C^*(s) = 1$$



- Se la portata utente aumenta, il compensatore richiede subito una portata uguale alla valvola d'alimento, senza aspettare che il livello scenda
- La retroazione va comunque conservata per compensare gli effetti delle inevitabili imprecisioni di sensori e attuatori

## - CONTROLLO DI TEMPERATURA IN UNA CALDAIA



- Var di controllo: comando alla valvola combustibile
- Disturbi: portata acqua calda richiesta e temperatura acque alimento caldaia
- Var controllata: temperatura acqua in uscita

## - Analisi della dinamica del processo

- Equazioni massa + energia  $\rightarrow$  equazioni differenziali non-lineari

Supponendo di muoversi nell'intorno di un punto di lavoro, la dinamica può essere approssimata da

$$\Delta T(s) = \mu_Q \frac{1}{(1+s\bar{\tau}_1)(1+s\bar{\tau}_2)} \Delta Q(s) + \mu_w \frac{(1+s\bar{\tau}_m)}{(1+s\bar{\tau}_1)(1+s\bar{\tau}_2)} \Delta W(s) + \frac{1+s\bar{\tau}_m}{(1+s\bar{\tau}_1)(1+s\bar{\tau}_2)} \Delta T_i(s)$$

con  $\mu_Q, \mu_w, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \bar{\tau}_m$  funzioni di parametri del processo e della portata di regime  $\bar{w}$

- Dinamica dell'attuatore

ipotizzando la completa combustione del gas, che tutto il calore prodotto dalla fiamma sia trasferito alla parete metallica, e che il servocomando della valvola abbia un funzionamento lineare e sia opportunamente tarato

$$\Delta Q(s) = \frac{1}{1 + sT_a} \Delta U$$

- Dinamica del sensore

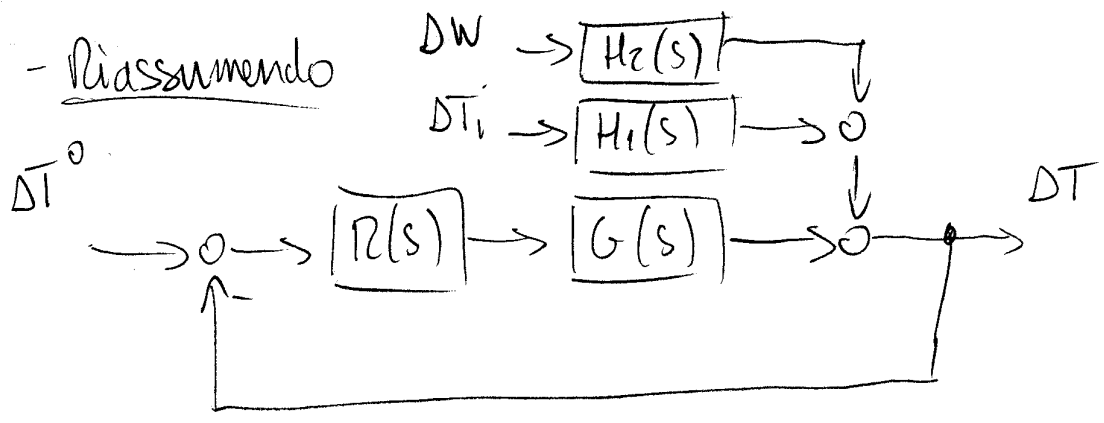
I sensori di temperatura hanno una struttura riassumibile come in



figura. Ipotizzando che la temperatura del corpo del sensore sia uniforme (ipotesi valida fino ad una certa frequenza), la dinamica tra la temperatura del fluido e la misura è analoga a quella tra temperatura esterna e temperatura interna del termoisolante

$$\Delta c(s) = \frac{1}{1 + sT_t} \Delta T(s)$$

(modello valido per  $\omega < 2 \div 3 \frac{1}{T_t}$ )



$$G(s) = M_Q \frac{1}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_0)(1+s\tau_f)}$$

$$H_1(s) = \frac{1+s\tau_m}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$

$$H_2(s) = \mu_w \frac{1+s\tau_m}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$

- Supponiamo di dover far fronte a perturbazioni a scalino di  $\Delta T^0$ ,  $\Delta T_i$ ,  $\Delta W$  di ampiezza  $A, B, C$ , rispettivamente

- PROGETTO REGOLATORE P

$$R(s) = K_P \quad L(s) = \frac{K_P M_Q}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_0)(1+s\tau_f)}$$

• Prestazioni statiche

$$e_{\infty \Delta T^0} = \frac{A}{1+K_P M_Q}$$

$$e_{\infty \Delta T_i} = \frac{B}{1+K_P M_Q}$$

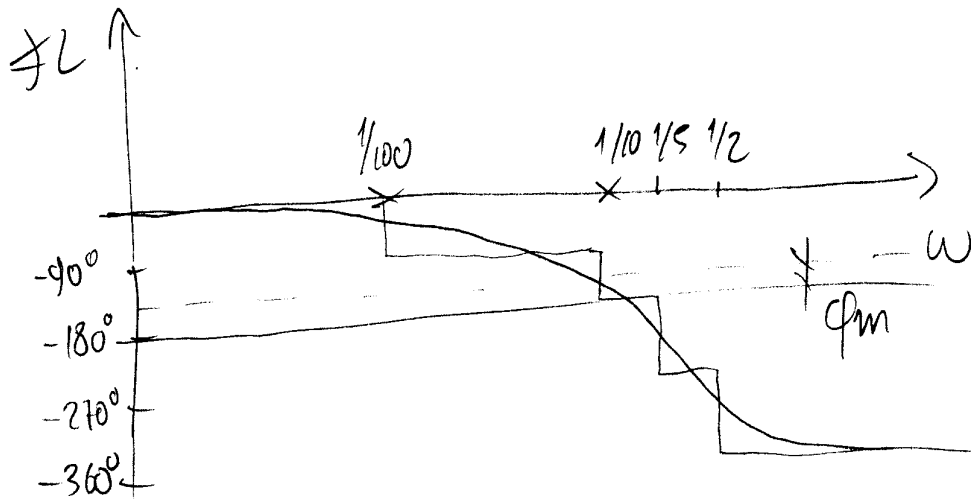
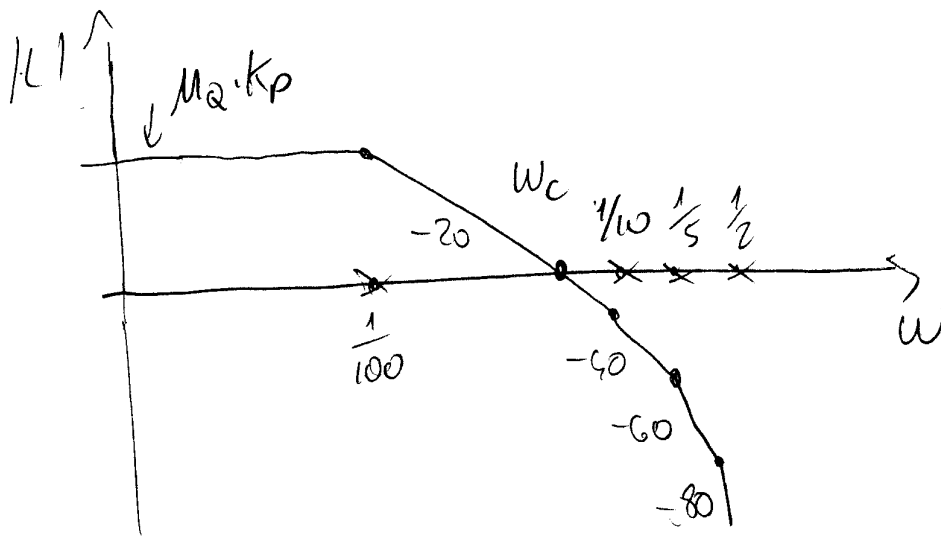
$$e_{\infty \Delta W} = \frac{C \mu_w}{1+K_P M_Q}$$

• Prestazioni dinamiche

Ipotizziamo le seguenti costanti di tempo

$$\tau_1 = 100 \text{ s} \quad \tau_2 = 10 \text{ s} \quad T_a = 2 \text{ s} \quad T_t = 5 \text{ s}$$

Occorre che il diagramma di  $|L(j\omega)|$  tagli l'asse 0dB con  $-20 \text{ dB/dec}$  di pendenza



- Aumentando il guadagno  $K_p$ , la banda aumenta, ma il margine di fase cede rapidamente quando ci si avvicina a  $\omega_c = 0.1 \text{ rad/s}$

- Se richiediamo  $\phi_m \geq 40^\circ$

$$\phi_m = 180 - \arctan(100 \omega_c) - \arctan(10 \omega_c) - \arctan(2 \omega_c) - \arctan(5 \omega_c)$$

$$\phi_m \geq 40^\circ \Rightarrow \omega_c \leq 0.065 \text{ rad/s}$$

- Nell'intervallo  $\omega \in [0.01 \text{---} 0.1]$ , il diagramma di Bode

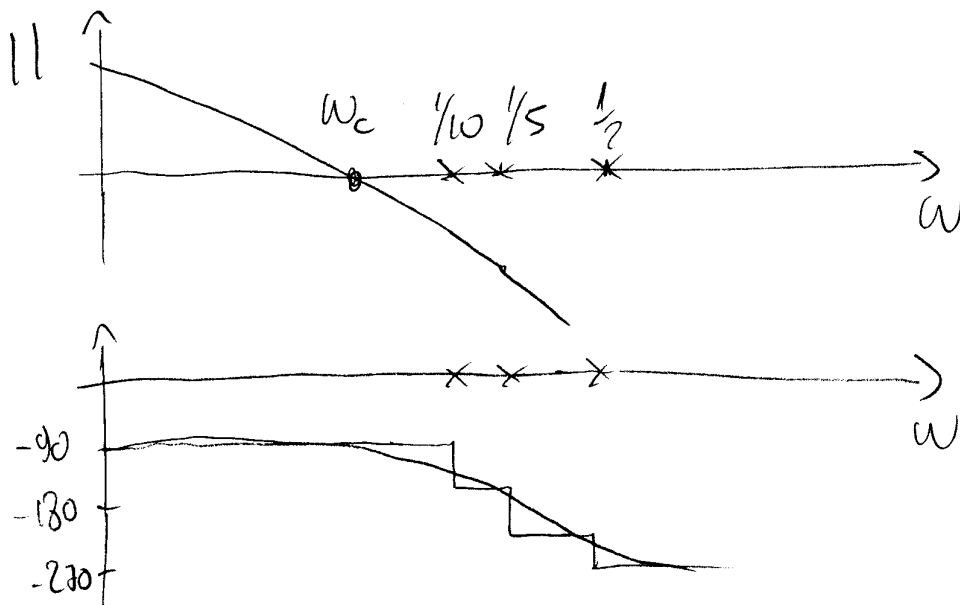
del modulo è  $\approx \frac{K_p M_Q}{s \tau_1} \Rightarrow \omega_c = \frac{K_p M_Q}{\tau_1}$

$$\Rightarrow K_p = \frac{\omega_c \tau_1}{M_Q}$$

- PROGETTO REGOLATORE PI

$$R(s) = K_p \frac{1 + sT_i}{sT_i} \quad L(s) = \frac{K_p M_Q (1 + sT_i)}{sT_i (1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)(1 + s\tau_0)(1 + sT_e)}$$

• Per allargare al massimo l'intervallo di compendenza  $-20 \frac{dB}{dec}$  si può scegliere  $T_i = \tau_1$



- Prestazioni statiche

$$e_{\infty} = 0$$

- Prestazioni dinamiche

$$\omega_c = \frac{K_p M_a}{T_i}$$

$$\varphi_m = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(10\omega_c) - \arctan(2\omega_c) - \arctan(5\omega_c)$$

$$\varphi_m \geq 40^\circ \Rightarrow \omega_c \leq 0.054 \text{ rad/s}$$

- PROGETTO REGOLATORE PID (reale)

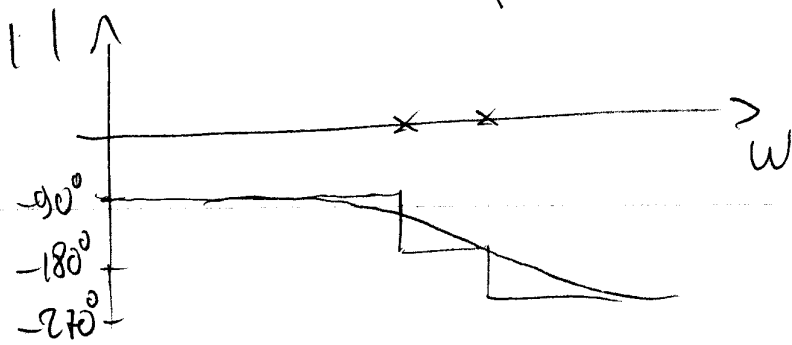
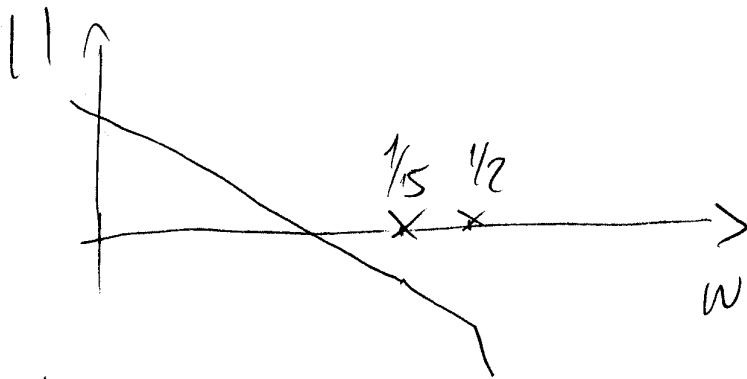
$$R(s) = K_p \frac{(1+sT_1)(1+sT_2)}{sT_i (1+sT_d/N)}$$

- Possiamo allargare ulteriormente la zona con pendenza  $-20 \text{ dB/dec}$  utilizzando il secondo zero per cancellare il secondo polo di  $G(s)$

- Piaziamo il polo ad alta frequenza p.es, a  $\frac{N}{T_d} = 5\omega_c$

$$\Rightarrow L(s) = K_p M_a \frac{1}{sT_i (1+sT_0)(1+sT_t)(1+s\frac{T_d}{N})}$$





• Prestazioni statiche

risultato sempre  $e_{\infty} = 0$

• Prestazioni dinamiche

$$\phi_m = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(5\omega_c) - \arctan(2\omega_c) - \arctan\left(\frac{\omega_c}{5\omega_c}\right)$$

$$\omega_c = \frac{K_p M_R}{T_i}$$

→ Se manteniamo lo stesso bando del PI, il margine di fase passa da  $40^\circ$  a  $57^\circ$

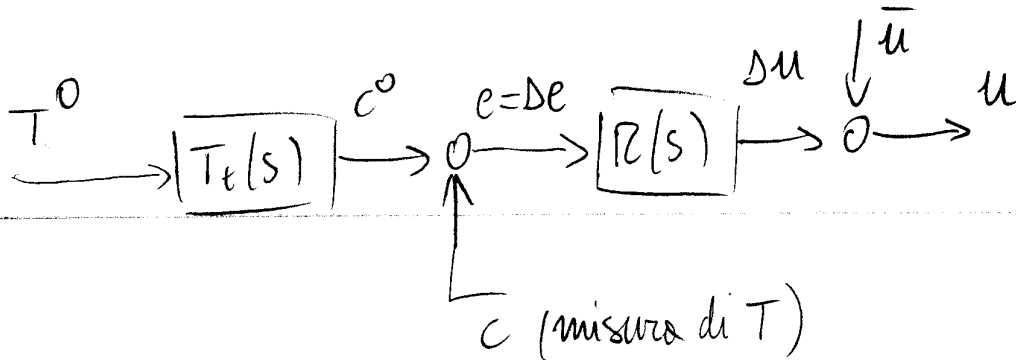
→ si vogliamo  $\phi_m = 40^\circ$ , lo bando passa a

$$\omega_c = 0.10 \text{ rad/s}$$

(quasi il doppio)  
del PI

## - SCHEMA DI CONTROLLO EFFETTIVO

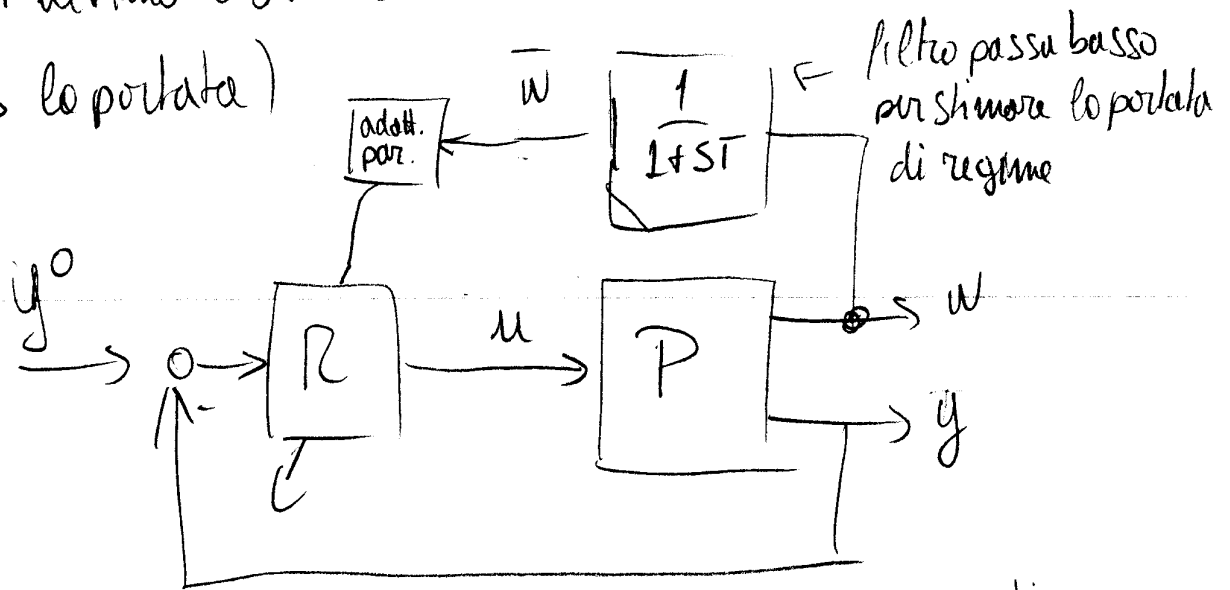
- Ricordando lo schema di controllo da cui è partita la derivazione di  $R(s)$ , si può ricavare l'effettivo schema della regolazione di temperatura



## - CONTROLLO ADATTATIVO

- La funzione di trasferimento  $P(s)$  dipende dal punto di lavoro del processo, in particolare dallo portata di regime  $\bar{w}$
- Se  $w(t)$  cambia pesantemente (x le richieste dell'utente) occorre modificare i parametri di  $R(s)$  in modo che siano adeguati alla nuova dinamica
- È possibile progettare il sistema di controllo in modo che si "ri-tiri" opportunamente a seconda del punto di lavoro

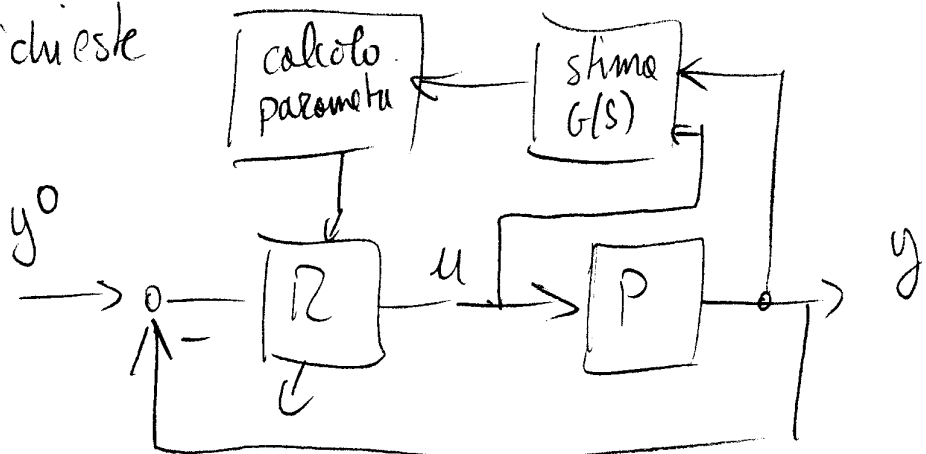
- Gain scheduling: lo struttura di  $G(s)$  è nota, e si sa come i parametri  $(\mu, \tau)$  dipendono dal punto di lavoro; quest'ultimo è stimabile misurando certe variabili (p.es. la portata)



il regolatore adatta i suoi parametri in modo da garantire buone prestazioni in tutte le condizioni operative previste

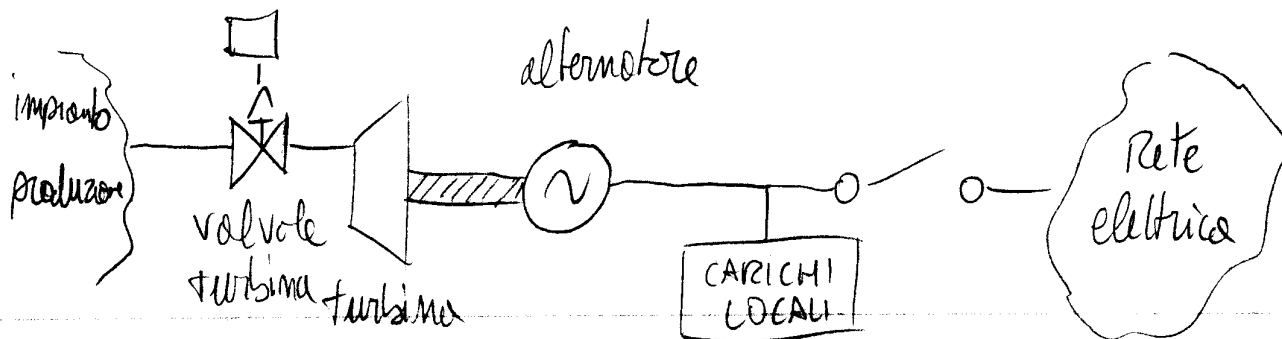
- Auto-tuning

La PdT del processo viene stimata dal regolatore correlando l'andamento della variabile di controllo e dell'uscita misurata. In base alla  $G(s)$  stimata, viene ricavata  $R(s)$  che garantisca le prestazioni richieste



- CONTROLLO FREQUENZA / POTENZA NEI TURBOGENERATORI

- Schema base di un turbogeneratore



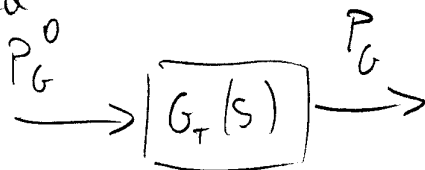
- Una turbina converte l'energia di un fluido in potenza meccanica scaricata sull'asse. Vari tipi di turbina: ad acqua (idroelettrica), a vapore e a gas (termoelettrica)
- Sullo stesso asse è collegato un generatore sincrono, che converte l'energia meccanica in energia elettrica, veicolata da correnti trifase sincrone con la frequenza di rotazione della macchina (50 Hz in Europa, 60 Hz negli USA)
- Il turbo alternatore può alimentare dei carichi locali, (funzionamento in isola), oppure essere connesso alla rete elettrica nazionale / continentale
- Gli obiettivi del controllo dipendono dallo stato della connessione

- In isola: fornire la potenza richiesta dai carichi locali, mantenendo costante la frequenza della tensione
- In rete: fornire una certa potenza ai carichi locali e alla rete, e partecipare alla regolazione di frequenza dell'intero rete

### - DINAMICA DEL PROCESSO

#### • Produzione di potenza meccanica

Il sistema di controllo dell'impianto agisce sulle valvole di turbina (o sulle valvole di combustibile e su tutti gli organi di regolazione dell'impianto) in modo da generare una certa potenza meccanica



possiamo approssimare  $G_T(s) = \frac{1}{1 + sT_G}$

- $T_G$  può variare da meno di un secondo a un centinaio di secondi, a seconda del tipo di impianto (idroelettrico, turbogas, turbina a vapore) e della strategia di conduzione

• Produzione di potenza elettrica

L'alternatore preleva una certa potenza meccanica  $P_A$  dall'albero e la converte in energia elettrica con un rendimento  $\eta_e$  (tipicamente  $\approx 95\%$ ). Le dinamiche elettriche sono piuttosto rapide rispetto alla dinamica delle potenze, quindi possiamo considerare il legame come algebrico

$$P_{el} = \eta_e P_A$$

• Bilancio di potenze sull'asse del turbogeneratore

L'albero del turbogeneratore, insieme con tutte le macchine ad esso collegate, è caratterizzato da un momento d'inerzia  $J$ , e quindi può immagazzinare energia cinetica aumentando la sua velocità di rotazione, che è sincrona con la frequenza delle correnti e tensioni trifase del generatore

$f$ : frequenza di rete e di rotazione macchine (o meno del # di poli elettrici)

$\omega = 2\pi f$ : pulsazione di rete e velocità angolare macchine  
 ↳ energia cinetica rotazionale

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \omega^2 \right) = P_G - P_A \quad \text{bilancio di potenze}$$

$$J \omega \dot{\omega} = P_G - P_A \quad \text{Ipotesi semplificativa: } P_A \text{ è indipendente da } \omega !!$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J \omega} (P_G - P_A) \quad \text{equazione non lineare}$$

• Equilibrio  $\dot{\omega} = 0 \Rightarrow \bar{P}_G = \bar{P}_A$

- linearizzazione  $\Delta \dot{\omega} = \frac{1}{J\bar{\omega}} (\Delta P_G - \Delta P_A) + \frac{-\Delta \omega}{J\bar{\omega}^2} (\bar{P}_G - \bar{P}_A)$

- Trasf. Laplace  $s \Delta \omega = \frac{1}{J\bar{\omega}} (\Delta P_G - \Delta P_A)$   $\left( \begin{array}{l} \bar{\omega} = 2\pi f = \\ = 2\pi \text{ 50 Hz} = \\ = 314 \text{ rad/s} \end{array} \right)$

$\Delta \omega = \frac{1}{J\bar{\omega}s} (\Delta P_G - \Delta P_A)$

- La grandezza  $J$  è scomoda da usare; si preferisce esprimere il legame normalizzando le frequenze rispetto alla frequenza nominale  $\omega_N$  e le potenze rispetto alla potenza nominale

$P_N$  del generatore

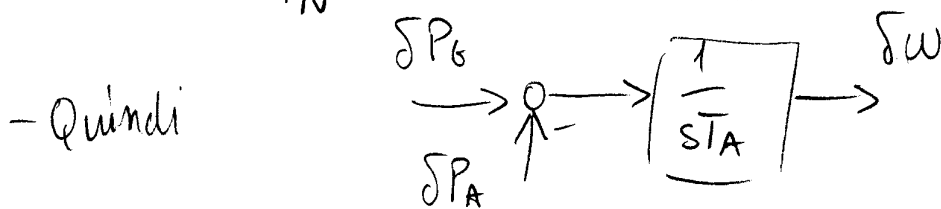
$$\underbrace{\frac{\Delta \omega}{\omega_N}}_{\text{adim.}} = \frac{P_N}{J\omega_N^2} \underbrace{\frac{1}{s}}_{[t]} \underbrace{\frac{\Delta P_G - \Delta P_A}{P_N}}_{\text{adim.}} \Rightarrow T_A = \frac{J\omega_N^2}{P_N} = \frac{2E_c}{P_N}$$

tempo di avviamento

tipicamente  $T_A \sim 10s$  per taglia di impianto da 1 a 1000 MW

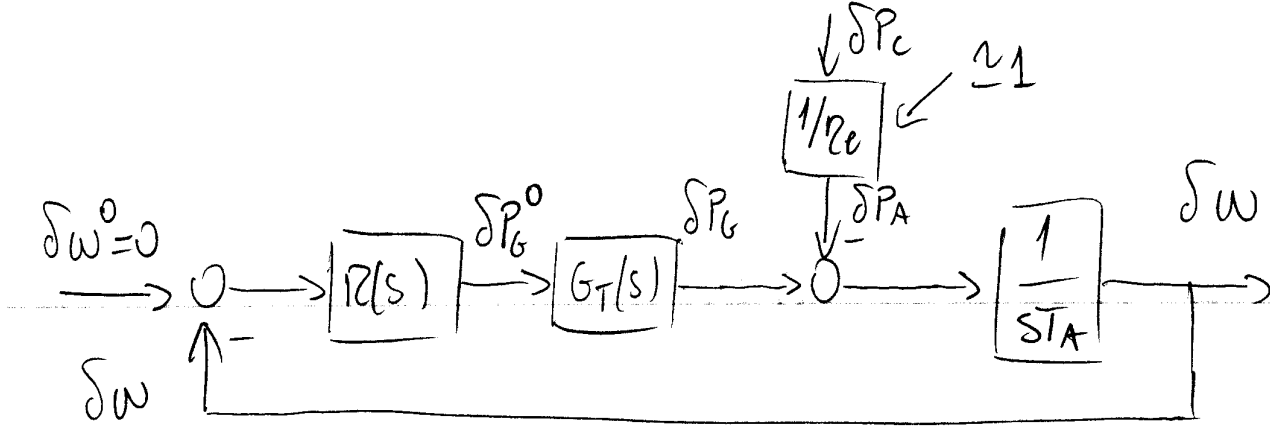
- Nel seguito per chiarezza utilizzeremo le variabili normalizzate

$$\delta P = \frac{\Delta P}{P_N} \quad \delta \omega = \frac{\Delta \omega}{\omega_N} \quad [\text{p.u.}]$$



## - GENERATORE IN ISOLA

- Obiettivi :
  - mantenere  $\omega \approx \omega_N$
  - fornire tutta la potenza  $P_c$  richiesta dai carichi locali



Regolatore P
 $R(s) = K_p = \frac{1}{\sigma}$ 
 $K_p = \frac{\Delta P}{\Delta \omega}$ 
 $\sigma = \frac{\Delta \omega}{\Delta P}$

( $\sigma$ : statismo del regolatore)

→ Prestazioni statiche quando  $\Delta P_c = \alpha \cos(\omega t)$

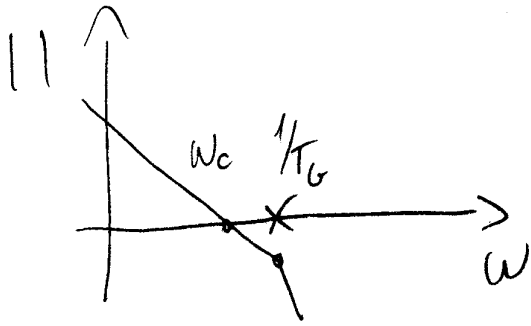
$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \alpha \frac{1}{\eta_e} \frac{-\frac{1}{sT_A}}{1 + \frac{K_p}{sT_A}} = -\frac{\alpha}{\eta_e} \frac{1}{K_p} \approx -\alpha \cdot \sigma$$

se  $\sigma = 5\%$ , aumentando il carico del 30% la frequenza a transitorio esaurito diminuisce di  $\alpha \cdot \sigma = 1.5\%$

- Comunque, a transitorio esaurito  $\Delta P_G = \Delta P_A$ , perché l'ingresso dell'integratore deve essere zero.



- Prestazioni dinamiche  $L(s) = K_p G_T(s) \frac{1}{sT_A} = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{sT_A(1+sT_G)}$



$$\omega_c = \frac{1}{\sigma T_A}$$

$$\phi_m = 90^\circ - \arctg(\omega_c T_G)$$

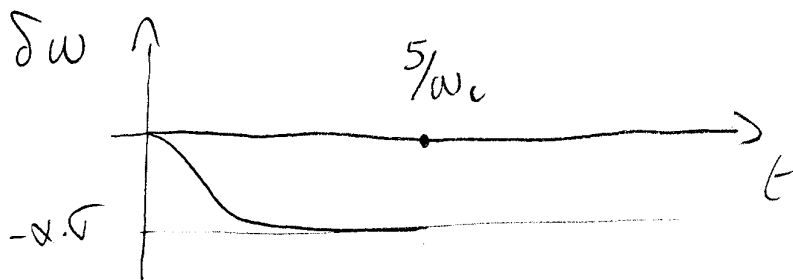
Se vogliamo  $\phi_m \geq 60^\circ$   $\omega_c \leq \frac{1}{T_G} \tan 30^\circ \leq \frac{0.57}{T_G}$

$$\frac{1}{\sigma T_A} \leq \frac{0.57}{T_G} \quad \sigma \geq 1.7 \frac{T_G}{T_A}$$

→ per avere un basso statismo (quindi un basso errore a regime) occorre un sistema di controllo della potenza meccanica molto pronto:  $\sigma = 5\% \Rightarrow T_G = 0.028 T_A$  (oppure un generatore molto "pesante")

→ è opportuno introdurre un'azione integrale nel regolatore (→ PI)

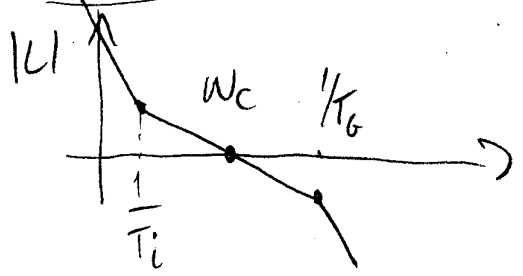
- Risposta a  $\delta P_c = \alpha \text{ sca}(t)$



**Regolatore PI**

$$R(s) = \frac{1}{s} \frac{1+sT_i}{sT_i}; \quad U(s) = \frac{1}{s} G_T(s) \frac{1}{sT_A} \frac{1+sT_i}{sT_i}$$

Prestazioni dinamiche



$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{T_A}}$$

$$\phi_m = \arctan(\omega_c T_i) - \arctan(\omega_c T_G)$$

per avere un buon  $\phi_m$  occorre tenere  $T_i \gg \frac{1}{\omega_c}$  e  $T_G \ll \frac{1}{\omega_c}$

p.es  $\omega_c = \frac{1}{2T_G}; \quad T_i = 5/\omega_c$

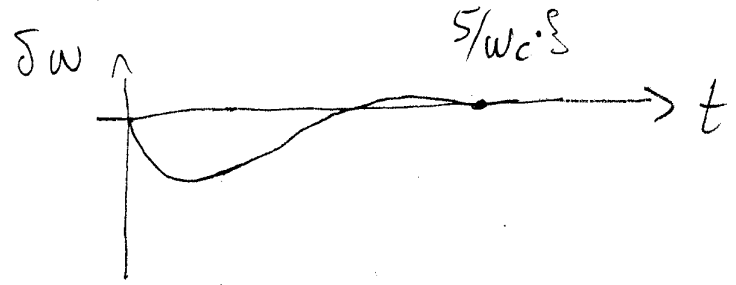
$$\phi_m = \arctan(4) - \arctan(0.5) = 52^\circ$$

Prestazioni statiche

$$\delta P_g = \alpha \text{ sca}(t)$$

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \alpha \frac{\frac{1}{sT_A}}{1 + \frac{1}{sT_i T_A}} = 0$$

Risposta a  $\delta P_g = \alpha \text{ sca}(t)$



(un accenno di oscillazione visto che  $\phi_m < 60^\circ$ )

- In generale si possono ottenere  $\omega_c$  fino a 1 rad/s, purché gli organi di regolazione siano sufficientemente rapidi

- GENERATORE CONNESSO IN RETE

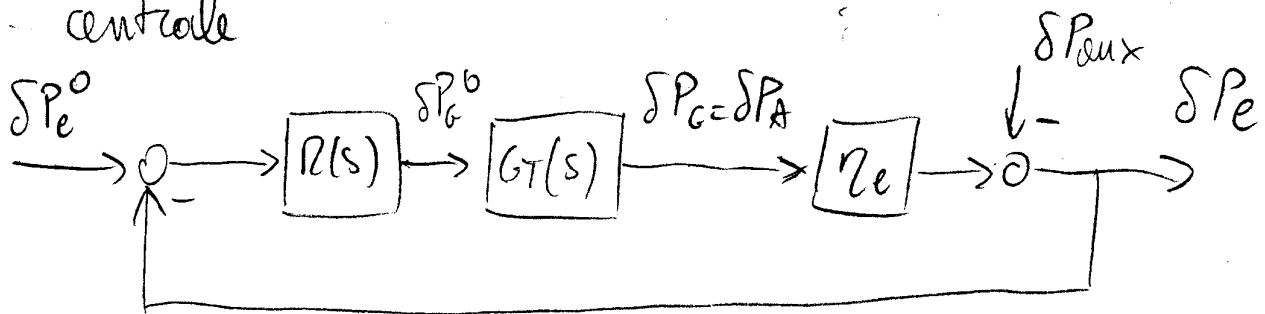
- Nell'ipotesi che il generatore resti sincrono con la rete, e che la potenza dei generatori nella rete sia  $\gg$  della potenza del generatore sotto esame (al limite  $\infty$ )

si ricava che  $\omega \cong \omega_N \cong \text{cost}$ ,

indipendentemente da quanta potenza si genera

quindi:  $\frac{d}{dt} (\int \omega^2) = 0 \Rightarrow P_G = P_A$

- Obiettivo 1: regolare la potenza prodotta (elettrica)  $P_e$ , al netto della potenza  $P_{aux}$  assorbita dagli ausiliari di centrale



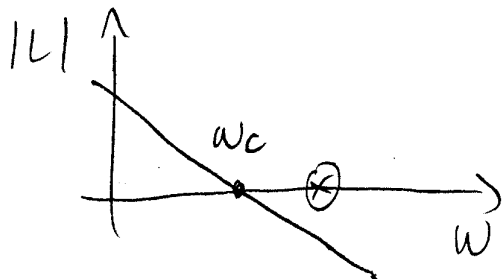
- Impieghiamo un regolatore di tipo PI:  $R(s) = K_p \frac{1+sT_i}{sT_i}$

- Prestazioni statiche  $\delta P_e^0 = \alpha \text{ sca}(t)$   $\delta P_{aux} = \beta \text{ sca}(t)$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \delta P_e^0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha}{1 + \frac{K_p}{sT_i}} = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \delta P_{aux} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\beta}{1 + \frac{K_p}{sT_i}} = 0$$

- Prestazioni dinamiche posto  $T_i = T_G$ ,  $L(s) = \frac{K_P}{sT_i}$

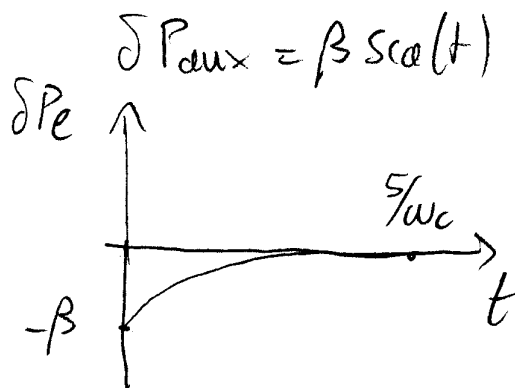
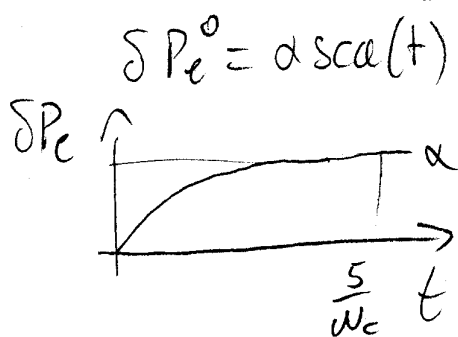


$$\omega_c = \frac{K_P}{T_i}$$

$$\phi_m = 90^\circ$$

- E' bene non spingere  $\omega_c$  oltre di  $\frac{1}{T_G}$  per non sollecitare il sistema di controllo del generatore oltre alla sua banda (ci saranno comunque poli a frequenza  $> \frac{1}{T_G}$  che abbiamo trascurato in questa analisi)

- Risposte a scalino



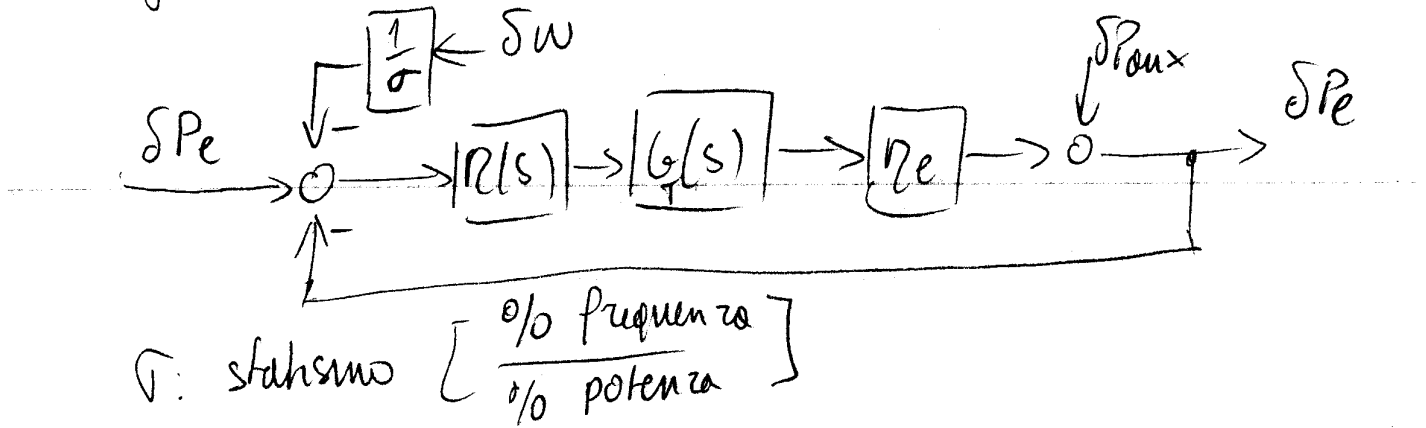
- Problema: se tutti i generatori della rete si comportano così, nessuno garantisce che

a)  $\sum P_{generate} = \sum P_{assorbite}$  (bilancio potenza)

b)  $\omega = \omega_N$  (frequenza rete = 50 Hz)

- REGOLAZIONE PRIMARIA DI FREQUENZA

La soluzione si ottiene facendo produrre ad ogni generatore una quota supplementare di potenza per partecipare alla regolazione di frequenza della rete



- Supponiamo di avere  $N$  generatori, nessuno di potenza nominale  $P_{Ni}$  e stazismo  $\sigma_i$ . Inizialmente sia

$$P_{ei} = P_{Ni} \quad \text{e} \quad \sum_i P_{ei} = \sum_j P_{cj} \quad ; \quad P_{cj} = \begin{matrix} \text{potenza} \\ \text{assorbita} \\ \text{carico } j\text{-esimo} \end{matrix}$$

la rete è all'equilibrio con  $\omega = \omega_N = 314 \text{ rad/s}$

- Al tempo  $t=0$  una grande utenza si sconnette;

la potenza assorbita totale varia di  $\Delta P_c = -A \cdot \text{scat}(t)$

- Inizialmente la potenza meccanica generata resta costante:

lo sbilancio tra  $\Delta P_G$  e  $\Delta P_A$  farà aumentare l'energia cinetica di tutte le macchine della rete, che hanno la

stessa velocità di rotazione  $\Rightarrow$  la frequenza di rete tende

ad aumentare  $\rightarrow \Delta \omega$  aumenta

- Ciascun generatore produrrà quindi (a meno delle dinamiche del sistema di controllo) una potenza ridotta di

$$\Delta P_{ei} = P_{Ni} \quad \delta P_{ei} = - \frac{P_{Ni}}{\sigma_i} \delta \omega$$

- La potenza prodotta tenderà quindi ad diminuire, finché non si realizzi nuovamente il bilancio  $\sum_i P_{ei} = \sum_j P_{cj} + \Delta P_c$  a questo punto la frequenza smetterà di crescere
- A transitorio esaurito, l'errore di frequenza vale:

$$\sum \Delta P_{ei} = \Delta P_c$$

$$\sum_i - \frac{P_{Ni}}{\sigma_i} \delta \omega = -A \quad \Rightarrow \quad \delta \omega = \frac{A}{\sum \frac{P_{Ni}}{\sigma_i}}$$

- Def: stacismo di rete  $\sigma_R$  t.c.  $\sum \frac{P_{Ni}}{\sigma_i} = \frac{\sum P_{Ni}}{\sigma_R}$

$$\text{ovv} \quad \sigma_R = \frac{\sum P_{Ni}}{\sum_i \frac{P_{Ni}}{\sigma_i}}$$

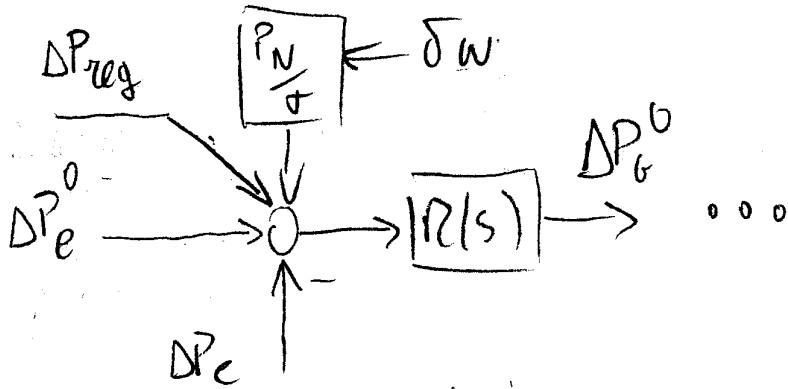
$$\delta \omega = \frac{A}{P_{Tot}} \sigma_R$$

$$\text{se } \sigma_R = 10\%, A = 16W, P_{Tot} = 506W$$

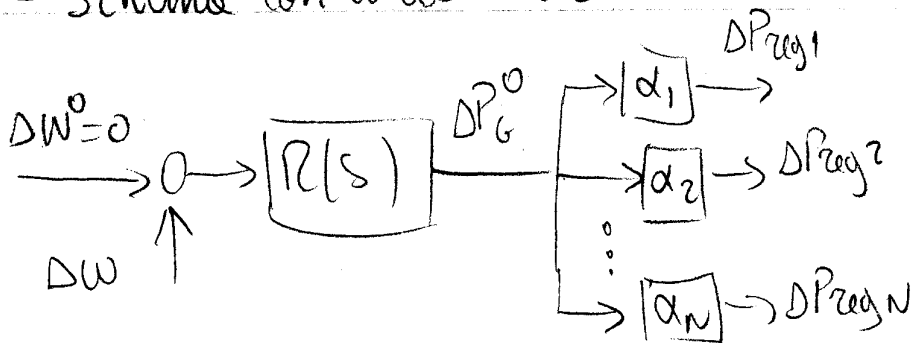
$$\delta \omega = \frac{1}{50} \cdot 0.1 = 0.2\%$$

- Osservazione 1: ogni generatore partecipa alla regolazione primaria di frequenza in ragione del suo statismo  $\nabla_i$
  - Oss 2: alcune unità possono avere  $\nabla = \infty$ , cioè non partecipare alla regolazione primaria - p.es. piccole unità di cogenerazione, oppure grandi impianti che si prestano poco a variare la loro potenza (carbone, nucleari)
- REGOLAZIONE SECONDARIA
- la regolazione primaria compensa variazioni del carico utente fino a qualche % in tempi rapidi ( $< 10$  s) non può però far fronte alle grandi variazioni di carico sull'arco della giornata (Italia: 20 ÷ 50 GW)
  - Si impiega quindi un regolatore centralizzato che provvede a compensare queste grandi variazioni, con tempi più lunghi. In Italia è gestito dal GRTN (gestore rete trasmissione nazionale)
  - Il regolatore centralizzato trasmette il segnale di errore agli impianti che partecipano alla regolazione di frequenza produrranno una potenza aggiuntiva per riportare  $\Delta w$  a zero

- Schema di controllo singolo impianto



- Schema controllo rete



- Dall'analisi precedente abbiamo concluso che, grazie alla regolazione primaria, staticamente risulta

$$\Delta W = \frac{\Delta P_{tot}}{P_{tot}} \sigma_R \quad \text{ovè} \quad \Delta W = \omega_N \sigma_R \frac{\Delta P_{tot}}{P_{tot}}$$

- la fct tra  $\Delta P_G^0$  e  $\Delta W$  ha quindi guadagno  $\frac{\omega_N \sigma_R}{P_{tot}}$

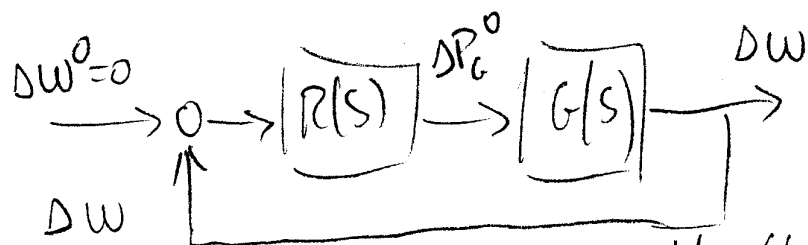
il polo dominante ha costante di tempo

$$T_1 = \frac{1}{\omega_{c1}} = 1.55$$

$\omega_{c1}$ : banda regolazione primaria



- Schema equivalente controllo rete

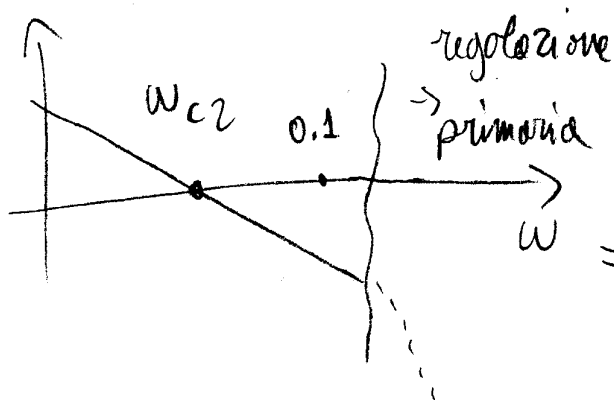


$$G(s) \approx \frac{wN}{P_{TOT}} \sigma_r$$

- Modello valido per  $w \ll 0.1 \text{ rad/s}$  (banda della regolazione primaria)

- Possiamo impiegare un regolatore I

$$R(s) = \frac{k_I}{s} \Rightarrow L(s) = k_I \frac{wN \sigma_r}{P_{TOT}} \frac{1}{s}$$



Torionimo  $w_c \ll 0.1 \approx 0.01 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

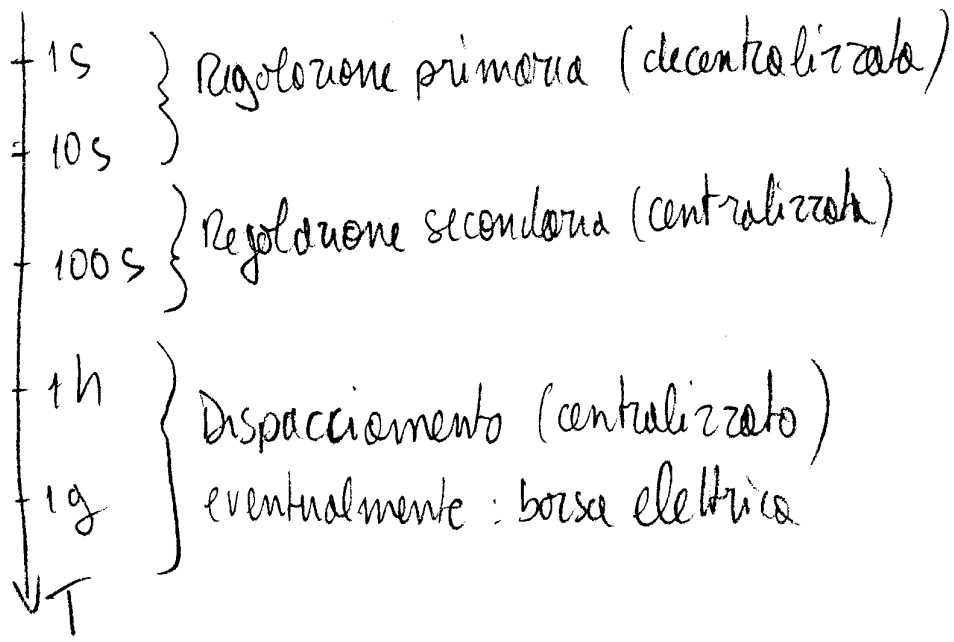
$\Rightarrow$  ai fini della regolazione secondaria, la regolazione primaria è "istantanea"

$\rightarrow$  controllo "in cascata"

- In caso di grandi variazioni del carico utente, o equivalentemente, di fuori servizio di un generatore, l'errore di frequenza viene annullato in

$$T_{oss} = \frac{5}{w_c} = 500 \text{ s} \sim 10 \text{ min}$$

- Il problema di regolazione di frequenza/potenza è quindi stato scomposto in diversi livelli gerarchici, su diverse scale di tempi.
- La regolazione primaria (rapida) è realizzata in modo decentralizzato: ogni impianto si regola in base a segnali locali. Il carico viene ripartito in base agli statismi e al "segnale"  $\Delta\omega$  che è ovviamente disponibile quando ci si collega alla rete.
- La regolazione secondaria, più lenta, è centralizzata a livello di gestore della rete (GRTN in Italia).
- Ad un livello ancora più alto sta la regolazione terziaria, che consta nella decisione di quali unità di produzione impiegare e a quali livelli (dispacciamento). Questo non è più tanto un problema di controllo, quanto di ottimizzazione/pianificazione economico/gestionale.



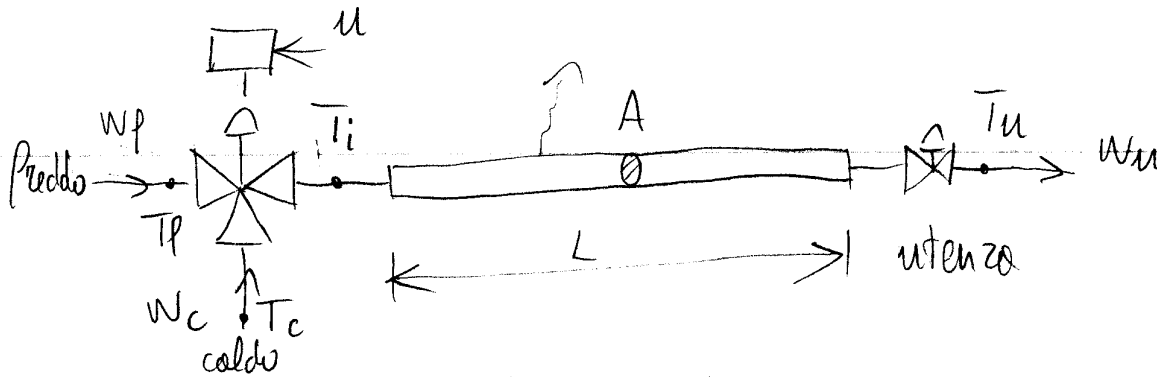
- È evidente come la regolazione primaria e secondaria sia un servizio per il buon funzionamento della rete che ha dei costi

- Occorre esorcire l'impianto a meno del 100% per avere dei margini di incremento di  $P_e$
- Occorre far variare rapidamente  $P_e$  a fronte della richiesta di potenza regolante

- In un contesto di mercato liberalizzato, questi servizi (detti "servizi ancillari") vengono quindi retribuiti, a meno che non siano imposti come obbligatori se si vuole entrare sul mercato

- CONTROLLO TEMPERATURA IN UN SISTEMA DI DISTRIBUZIONE

- Si consideri il seguente sistema, composto da un miscelatore che alimenta una tubazione di distribuzione



- L'obiettivo del controllo è di regolare la temperatura d'uscita  $T_u$ , contrastando le variazioni di portata utenza, le variazioni di  $T_p$  e  $T_c$ , e le perdite di calore lungo la tubazione per l'imperfetto isolamento
- Tarando opportunamente il servocomando della servovalvola si può fare in modo che

$$\Delta T_u = \frac{1}{1 + sT_m} \Delta u$$

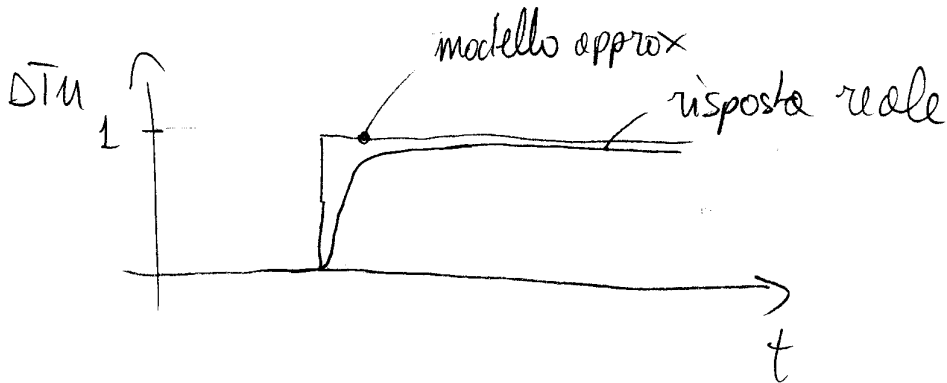
- La dinamica è essenzialmente dovuta al servocomando, visto che gli accumuli di massa ed energia nella valvola e tra vie sono trascurabili

- Ipotizzando che la distribuzione di velocità radiale nella tubazione sia uniforme, e che lo scambio termico con le pareti del tubo sia trascurabile, tra le variazioni di temperatura all'ingresso e quelle all'uscita della tubazione c'è una dinamica di ritardo puro

$$\Delta T_u = e^{-s\tau} \Delta T_i \quad \tau = \frac{\rho A L}{\bar{w}}$$

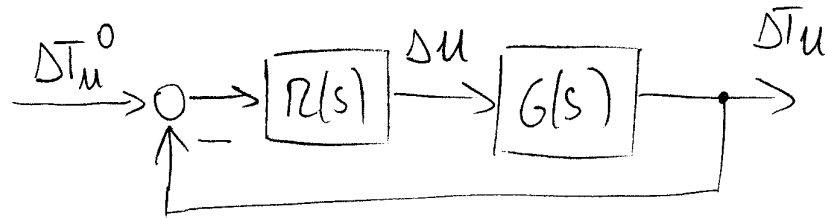
$\rho$ : densità del fluido  
 $A$ : sezione del tubo  
 $\bar{w}$ : portata di regime

- Risposta a scalino  $\Delta T_i = \text{sc}(t)$



- SCHEMI DI REGOLAZIONE

- È possibile realizzare uno schema classico di regolazione in retroazione

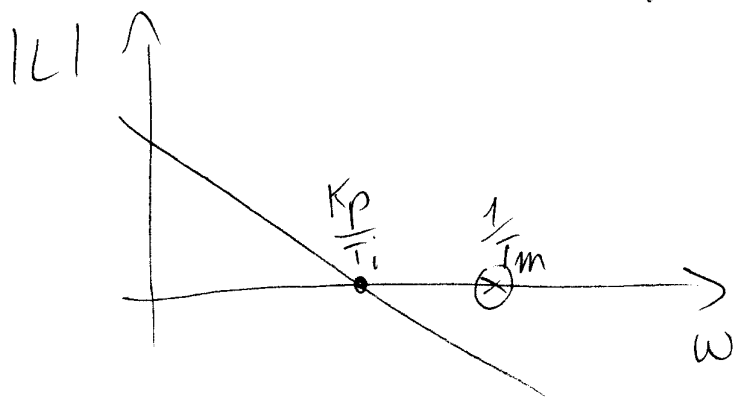


$$G(s) = \frac{1}{1+sT_m} e^{-\tau s}$$

- Supponiamo di impiegare un regolatore di tipo PI: l'azione integrale porta ad avere  $e_{\infty} = 0$  o fronte di disturbi a scalino; possiamo impiegare lo zero per compensare il ritardo di fase del servomotore

$$R(s) = K_p \frac{1+sT_i}{sT_i} \quad T_i = T_m$$

$$L(s) = \frac{K_p}{sT_i} e^{-s\tau}$$



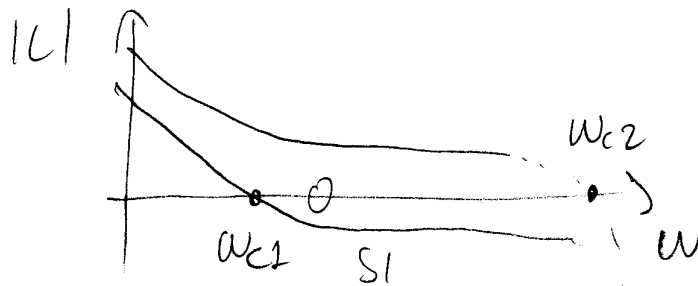
$$\omega_c = \frac{K_p}{T_i}$$

$$\varphi_c = -90^\circ - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\varphi_m = 90^\circ - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi}$$

- Se vogliamo  $\phi_m \geq 60^\circ \Rightarrow \omega_c \leq \frac{0.57}{\tau}$

- Potremmo guadagnare un po' di margine di fase introducendo uno zero in più nel regolatore (PID); di fatto però la sua costante di tempo deve essere  $T < \frac{1}{\omega_c}$ , altrimenti l'attraversamento dell'asse 0dB si sposta molto avanti, e il margine di fase scivola a causa del ritardo



→ non si riesce ad allargare la banda oltre a  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

- Esempio  $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ;  $A = 10^{-3} \text{m}^3$ ;  $L = 50 \text{m}$ ;  $\bar{w} = 1 \text{kg/s}$

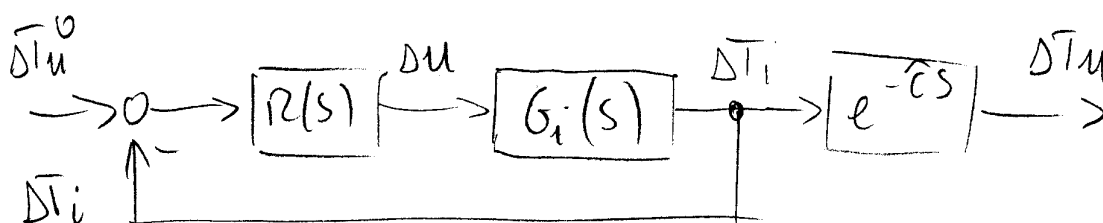
$$\tau = \frac{\rho A L}{\bar{w}} = 50 \text{s}; \omega_{c \max} = \frac{1}{40} = 0.025 \text{rad/s} \rightarrow T_{0.55} = \frac{5}{\omega_c} = 200 \text{s}$$

- Se vogliamo un sistema di controllo più rapido, occorre intervenire sulla dinamica del processo (cioè su  $G(s)$ )

- Soluzione (1) : ridurre  $\hat{\tau}$ , per esempio riducendo la sezione del condotto, e quindi aumentando la velocità del fluido (ove accettabile)

$$A = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \Rightarrow \hat{\tau} = 20 \text{ s} \Rightarrow w_{\text{max}} = 0.05 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

- Soluzione (2) : migliorare la orientazione del condotto, in modo da far sì che, dopo un ritardo di  $\hat{\tau}$  secondi,  $\Delta T_u = \Delta T_i$ . A questo punto è sufficiente regolare  $\Delta T_i$  mediante retroazione



$$G_i(s) = \frac{1}{1 + sT_m} \quad R(s) = K_p \frac{1 + sT_i}{sT_i} \quad T_i = T_m$$

$$L(s) = \frac{K_p}{sT_i} \quad (\text{nello misura in cui è valido il modello})$$

$$\varphi_m = 90^\circ \quad ( \quad \quad \quad )$$

L'unico limite alla banda è dato dalla velocità della servovalvola



Discussione del caso del  
controllo di temperatura  
nei surriscaldatori (qualitativo)

## - INTRODUZIONE

- Nelle precedenti lezioni abbiamo studiato il problema del progetto del regolatore, cioè di stabilire la funzione di trasferimento  $R(s)$  del sistema di controllo. Si pone ora il problema della realizzazione tecnologica del regolatore

a) Realizzazione analogica

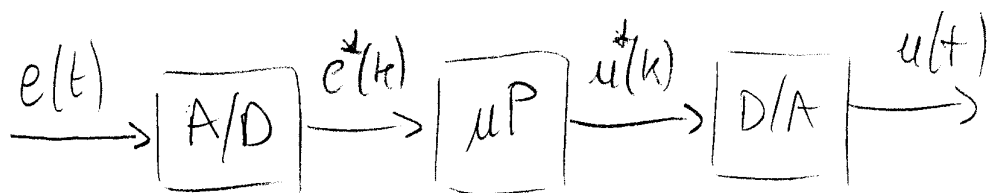
Si costruisce un sistema fisico (dinamico) che abbia la funzione di trasferimento richiesta tra ingresso e uscita

- elettronica: circuito elettrico (RLC + op. amp.)
- pneumatica: circuito pneumatico (valvole, molle, serbatoi gonfiabili)
- etc.

Nel passato questa era la soluzione più diffusa, per il suo basso costo. E' chiaro però che la flessibilità di una realizzazione analogica è molto ridotta

× es: cambiare la struttura di  $R(s)$  significa cambiare una rete elettrica, o comunque i valori di alcuni componenti

b) Realizzazione digitale



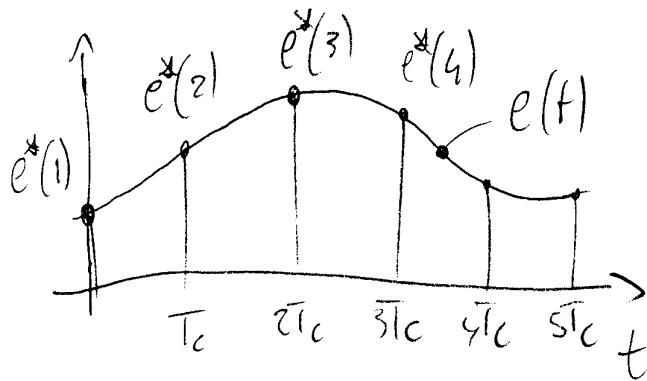
Si converte il segnale analogico in un segnale digitale, campionato ad intervalli regolari. Il segnale viene elaborato da un microprocessore per produrre il segnale di controllo  $u^*(k)$ , che viene riconvertito in un segnale digitale.

Occorre progettare il programma che gira sul  $\mu P$  in modo che la relazione tra  $e(t)$  e  $u(t)$  sia simile a quella specificata da  $R(s)$ .

- COMPONENTI SIST. CONTROLLO DIGITALE

- **A/D** Campionatore sincrono

È un circuito elettronico che misura  $e(t)$  ad intervalli di tempo  $T_c$  (tempo di campionamento), e lo converte in un numero digitale, accessibile al microprocessore.



$$e^*(k) = e(kT_c)$$

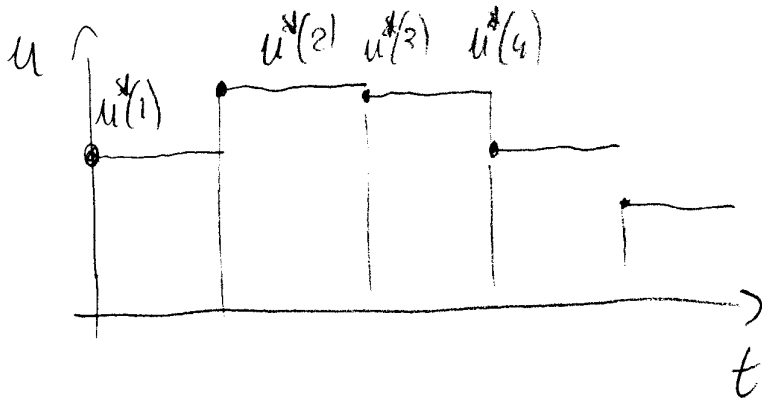
- Oltre che essere discretizzato sull'asse dei tempi, il segnale viene anche quantizzato, visto che la rappresentazione digitale ha un numero finito di bit (8, 17, 16, 20, 24).  
 E chiaro che un numero > di bit permette una rappresentazione più accurata, comportando però > costi del convertitore.

- MP microprocessore

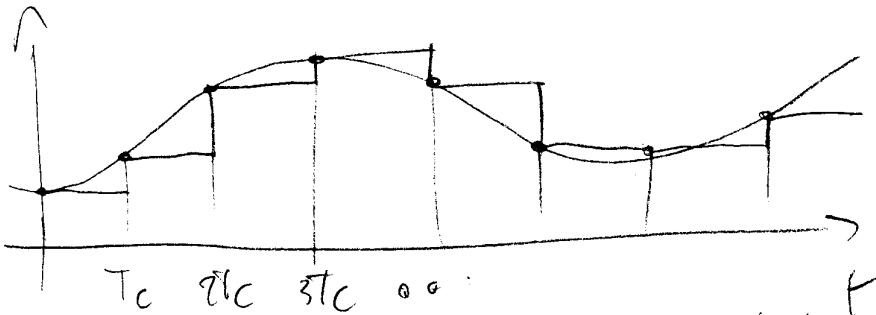
Esegue ciclicamente un programma, ricominciando ad intervalli di tempo di  $T_c$ , non appena è disponibile la lettura del nuovo segnale  $e^*(k)$ .

- D/A convertitore digitale analogico (sincrono)

Il convertitore più semplice (e più usato) è il cosiddetto mantentore di ordine zero (ZOH), che mantiene l'uscita analogica pari all'ultimo valore digitale ricevuto.



- Se consideriamo la coppia A/D + D/A,



si può intuire come la conversione introduce 2 tipi di distorsione

- aggiunta di armoniche a frequenze multiple di  $\frac{1}{T}$
- ritardo di fase equivalente a  $e^{-T_c/2s}$

E' inoltre chiaro che e' impossibile rappresentare segnali a frequenza superiore di  $\frac{1}{2T_c} = f_N$  (frequenza di Nyquist)

→ Sarà quindi necessario prendere  $T_c$  sufficientemente ridotto, compatibilmente col tempo di ciclo del programma sul  $\mu P$

- REALIZZAZIONE DIGITALE  $R(s)$

- Ogni sistema lineare di p.d.t.  $R(s)$  può essere rappresentato con le sue equazioni di stato e di uscita

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Queste possono essere approssimate da equazioni alle differenze, p.es. tramite il metodo di Eulero

$$\dot{x}(t) \simeq \frac{x(t+T_c) - x(t)}{T_c}$$

$$x(kT_c) = x^*(k) \quad u(kT_c) = u^*(k) \quad y(kT_c) = y^*(k)$$

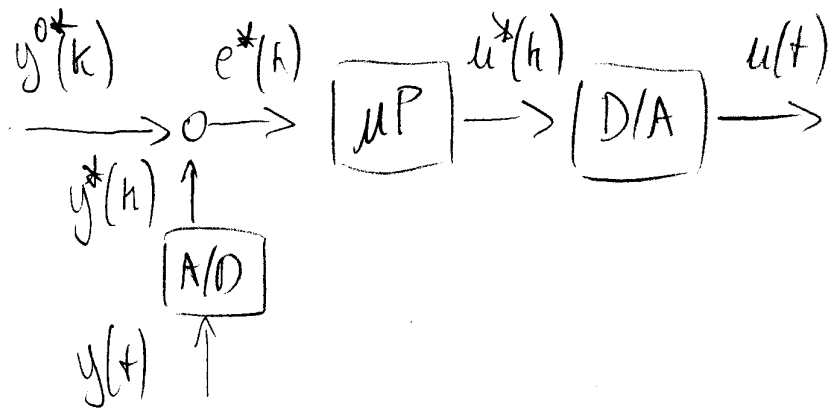
$$\frac{x^*(k+1) - x^*(k)}{T_c} = Ax^*(k) + Bu^*(k)$$

$$y^*(k) = Cx^*(k) + Du^*(k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^*(k) = Cx^*(k) + Du^*(k) & \text{calcolo uscita} \\ x^*(k+1) = x^*(k) + T_c [Ax^*(k) + Bu^*(k)] & \text{aggiornam. stato} \end{cases}$$

-> Queste due equazioni sono la base del codice del sistema di controllo

- REALIZZAZIONE DIGITALE PI



$$R(s) = K_p \frac{1 + sT_i}{sT_i}$$

$$U(s) = R(s) E(s)$$

$$U = K_p \frac{1 + sT_i}{sT_i} E = \underbrace{K_p E}_I + K_p \frac{1}{sT_i} E$$

si ha  $x(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = e(t) \\ u(t) = \frac{K_p}{T_i} x(t) + K_p e(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^*(k+1) = x^*(k) + T_c e^*(k) \\ u^*(k) = \frac{K_p}{T_i} x^*(k) + K_p e^*(k) \end{cases}$$

- Pseudocodice (da eseguire ogni  $T_c$  secondi (interrupt))

input  $y^o$ ;

convert  $y$ ;

$e := y^o - y$ ;

$u := K_p / T_i * x + K_p * e$ ; // calcolo  $u$

convert  $u$

$x := x + T_c * e$ ; // aggiornamento  $x$

- Possiamo ora aggiungere 2 funzionalità

- anti windup

- commutazione auto/manuale senza sbalzi

$$\left. \begin{array}{l} u_{\text{auto}} = K_p e + K_p / T_i x \\ u_{\text{auto}} = u_{\text{man}} \end{array} \right\} \Rightarrow x = (u_{\text{man}} - K_p e) * T_i / K_p$$

$$\Downarrow \\ x_{\text{man}} = (u_{\text{man}} - K_p e) T_i / K_p$$



- Pseudo codice 2

input  $y^o$

input  $u_{\min}$

convert  $y$

$e := y^o - y;$

if auto then

$u := K_p / T_i * x + K_p * e;$

$x := x + T_c * e;$

if  $u > u_{\max}$  then

$u = u_{\max};$

$x := (u_{\max} - K_p e) * T_i / K_p$

else if  $u < u_{\min}$  then

$u := u_{\min}$

$x := (u_{\min} - K_p e) * T_i / K_p$

else

$u := u_{\min}$

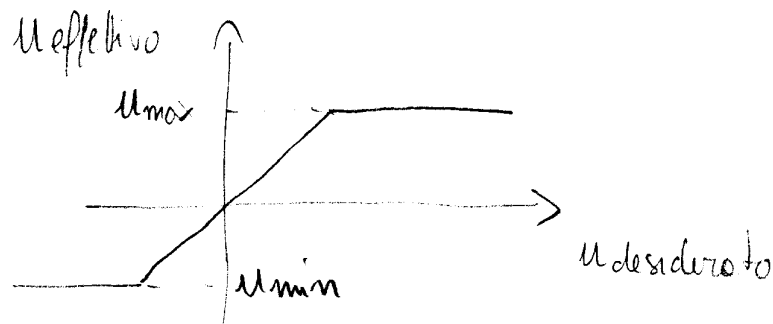
$x := (u_{\min} - K_p * e) * T_i / K_p$

output  $u;$

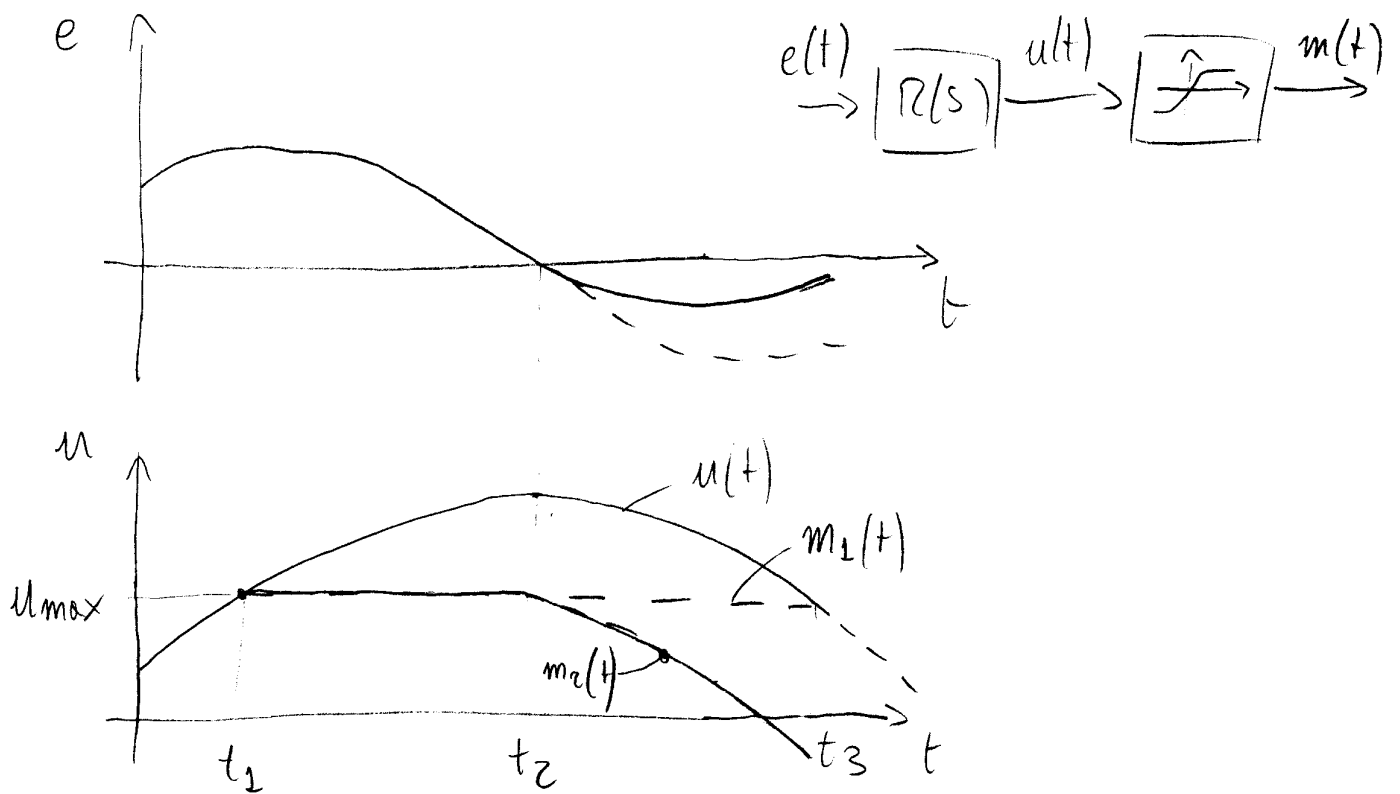
# COMPLEMENTI CONTROLLO ROND VARIABILE

①

- EFFETTO WINDUP NEI REGOLATORI PID
- L'analisi svolta in precedenza del funzionamento dei regolatori PID si basa sull'ipotesi di linearità dei sistemi coinvolti
- In pratica, ogni attuatore ha un valore massimo e un minimo oltre i quali non può lavorare; può quindi essere rappresentato da una caratteristica non-lineare



- Quando  $u > u_{\text{max}}$  o  $u < u_{\text{min}}$ , si dice che l'attuatore "satura"
- Se il regolatore ha un effetto integrale, si genera un fenomeno noto come "integrator windup" (saturazione carica integrale) che ha effetti negativi sul controllo
- Supponiamo per semplicità che il regolatore sia puramente integrale



- All'istante  $t_1$ , l'uscita del regolatore  $u(t)$  supera il valore massimo; l'attuatore fornirà il valore massimo  $u_{max}$
- All'istante  $t_2$ , l'errore cambia segno; sarebbe opportuno che la variabile di controllo  $u(t)$  cominciasse a diminuire. In realtà, essa rimane costante fino all'istante  $t_3$ , perché occorre eliminare la carica integrale accumulata da  $t_1$  a  $t_2$ . Si introduce cioè un effetto di ritardo (non lineare) che ha conseguenze negative sulle prestazioni di controllo
- Occorre quindi fare in modo che la variabile di controllo cominci a scendere vicino a  $t_2$ , cioè non appena l'errore ha cambiato segno

## COMPLEMENTI CONTROLLO MONOVARIABILE

(3)

- In altre parole, la variabile di controllo  $u(t)$  viene calcolata tenendo anche in conto i limiti di saturazione dell'attuatore
- Ci sono diversi modi per realizzare questo tipo di funzionalità non come dispositivi o funzionalità "anti-windup"
- Non entriamo però nel dettaglio di come vengono realizzati

- REGOLATORI ON-OFF

- Finora abbiamo supposto che sia possibile variare con continuità il valore della variabile di controllo. In qualche caso ciò non è possibile, o risulta troppo costoso. Esempi

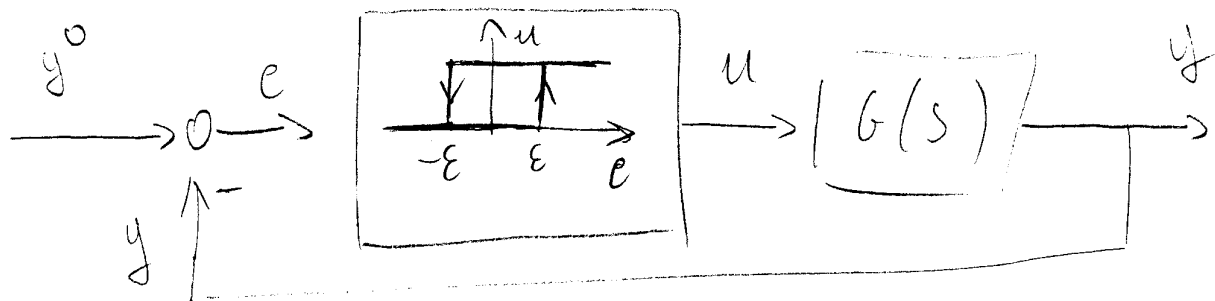
- riscaldatori elettrici comandati da un interruttore
- valvole on-off (non modulanti)

- Sono possibili 2 strategie:

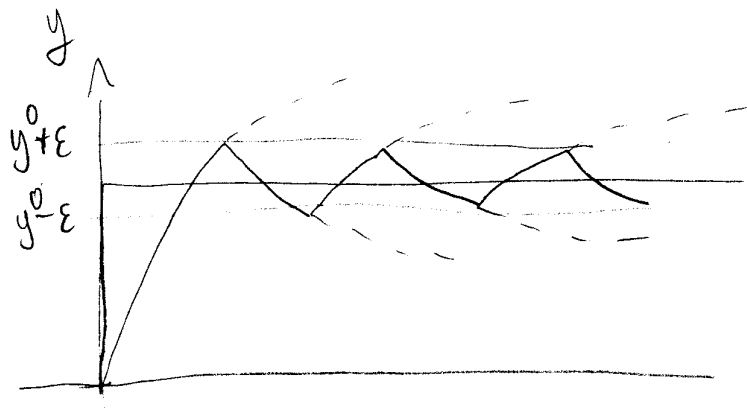
- controllo a relé
- controllo PWM (modulazione d'ampiezza di impulsi)

- REGOLATORI A RELÉ

- Il valore di  $u(t)$  viene deciso in base al segno di  $e(t)$ ; si introduce una certa zona di isteresi per evitare commutazioni spurie dovute all'errore di misura

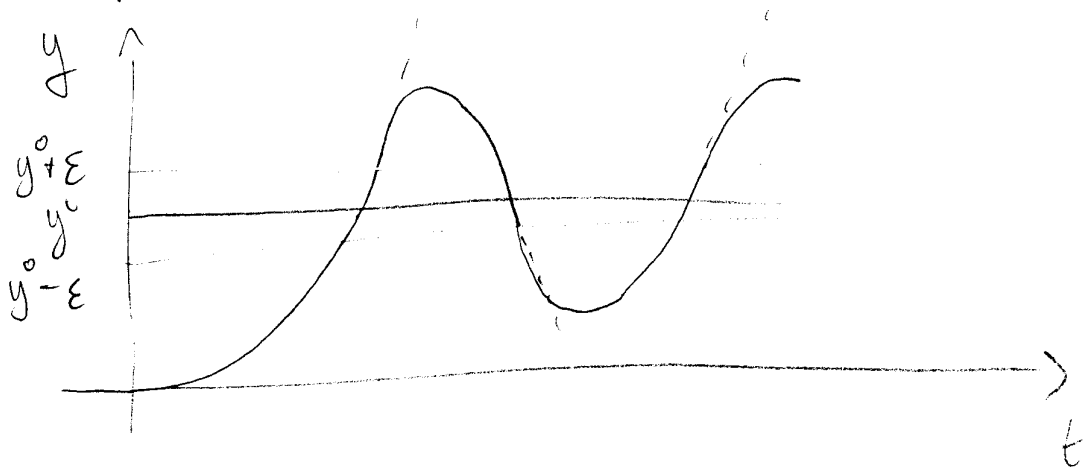


- Se  $G(s) = \frac{1}{1+sT}$ , si può valutare graficamente l'andamento della variabile controllata



-> scaldobagno elettrico

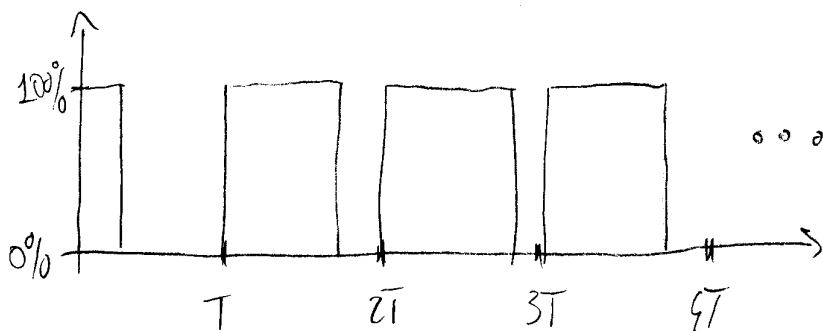
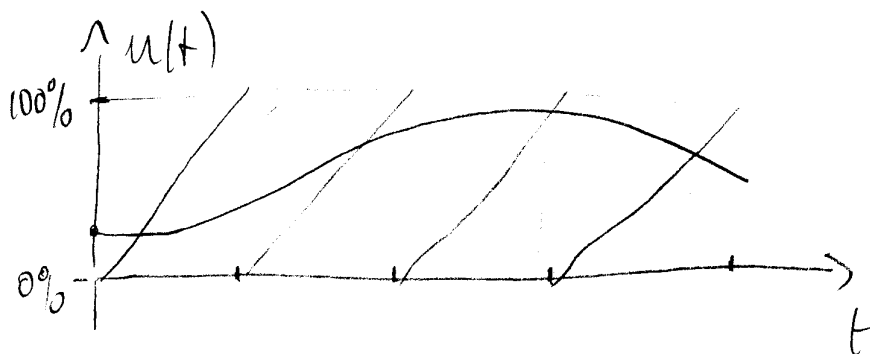
- Riducendo l'ampiezza dell'isteresi  $\bar{\epsilon}$  si ottiene una maggiore precisione del controllo, a scapito però di una frequenza di commutazione più elevata, e della possibilità di commutazioni spurie
- se il processo da controllare ha invece un grado relativo più elevato, ovvero ritardi puri, la variabile controllata oscilla in un intervallo molto più ampio di  $\pm \epsilon \Rightarrow$  soluzione sconsigliata



- CONTROLLO PWM

- In molti casi l'attuatore è di tipo on-off, ma può essere acceso e spento ad intervalli di tempo molto più rapidi della dinamica dominante del sistema da controllare (es, riscaldatori elettrici comandati da transistor di potenza)

- L'idea è di generare un segnale ad impulsi con un periodo  $T \ll \frac{1}{\omega_c}$ . Ai fini del processo da controllare (che è di tipo "passa basso" conterranno solo le armoniche di bassa frequenza, cioè il "valor medio" del segnale



- Questa strategia funziona tanto meglio quanto più  $T \ll \frac{1}{\omega_c}$

(es motori elettrici  $\frac{1}{T} = 2 \div 5 \text{ KHz}$ ,  $\omega_c = 100 \text{ rad/s} = 16 \text{ Hz}$ )

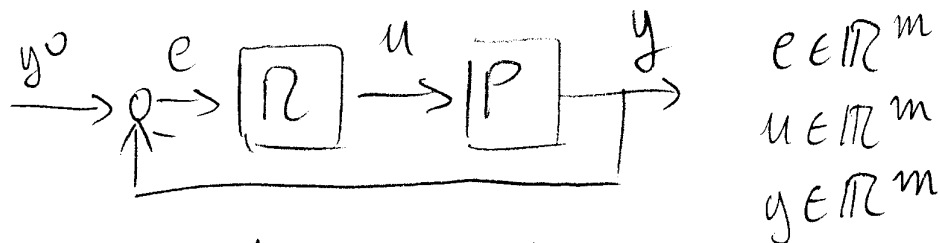
# CONTROLLO MULTIVARIABILE

①

## - SISTEMI DI CONTROLLO MULTIVARIABILE

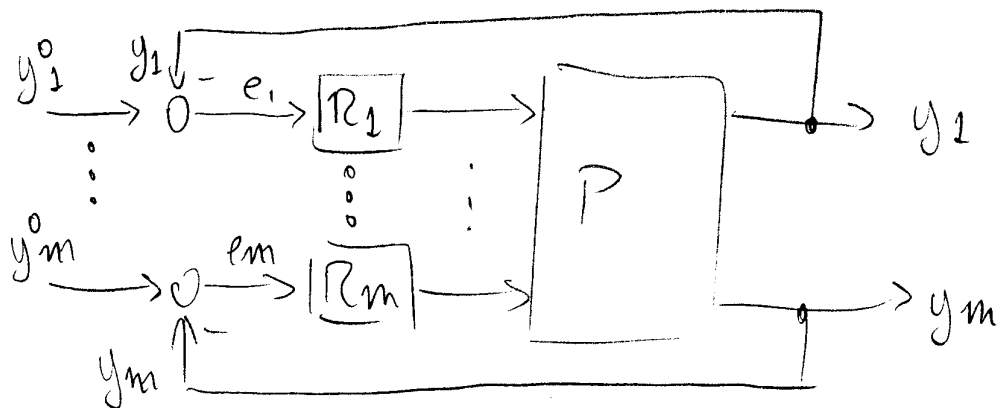
- L'analisi si è finora concentrata sui sistemi di controllo monovariabile: 1 variabile di controllo e 1 variabile controllata
- Molti problemi di controllo significativi hanno però una struttura multivariabile:  $m$  variabili di controllo vengono usate per regolare  $p$  variabili d'uscita. Per poterle regolare in modo indipendente, occorre che sia  $m \geq p$ ; in molta maggior parte dei casi  $m = p$
- Fondamentalmente sono possibili due strategie di controllo

### • centralizzata



Le variabili di controllo vengono calcolate in funzione di tutte le misure e i setpoint

### • decentralizzato





- I sistemi centralizzati vanno progettati usando tecniche più generali di quelle viste finora. Possono fornire prestazioni più spinte, però sono più complessi da progettare e gestire (effetto "scatole nere")
- I sistemi decentralizzati si possono progettare utilizzando le tecniche già viste, e sono più "semplici" da gestire. Le prestazioni ottenibili sono meno spinte, soprattutto per sistemi fortemente interagenti
- SCOMPOSIZIONE EURISTICA
  - Metodo di progetto per un sistema decentralizzato
    - 1) Si ordinano ingressi ed uscite in modo che sia massima l'influenza  $u_j \rightarrow y_j$  e minima l'influenza  $u_j \rightarrow y_{k \neq j}$ , e che i tempi di risposta tra  $u_j$  e  $y_j$  siano crescenti (dal più veloce al più lento)
    - 2) Si progetta il sistema di controllo  $R_1(s)$  che controlla  $y_1$  usando  $u_1$  e si chiude l'anello
    - 3) Col sistema  $R_1(s)$  funzionante, si progetta il sistema  $R_2(s)$  che controlla  $y_2$  con  $u_2$

4) Si prosegue fino a  $R_m$

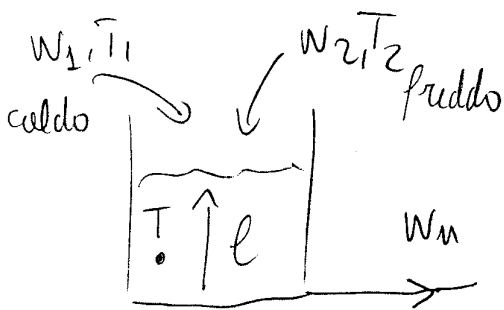
5) Se necessario, si ri-torono i primi anelli di controllo (il cui funzionamento può essere alterato dalla chiusura degli ultimi)

- Questa procedura ha buone probabilità di riuscita se il processo è scarsamente interagente, cioè se gli elementi sulla diagonale della matrice di trasferimento  $G(s)$

dominano su quelli fuori diagonale, e se gli anelli vengono chiusi dal più veloce al più lento

- In realtà è sufficiente che la matrice sia circa triangolare nel qual caso il requisito di ordinamento delle velocità non è più necessario

- ESEMPIO 1 Controllo di temperatura e livello in un serbatoio



$w_u$  } var. controllo;  $T$  } var  
 $w_1$  } controllo;  $e$  } controllata

$w_2, T_2$ : disturbi

- Influenze  $u \rightarrow y$

$w_u$  influenza  $e$  ma non  $T$

$w_1$  influenza poco  $e$  e tanto  $T$

$\Rightarrow$

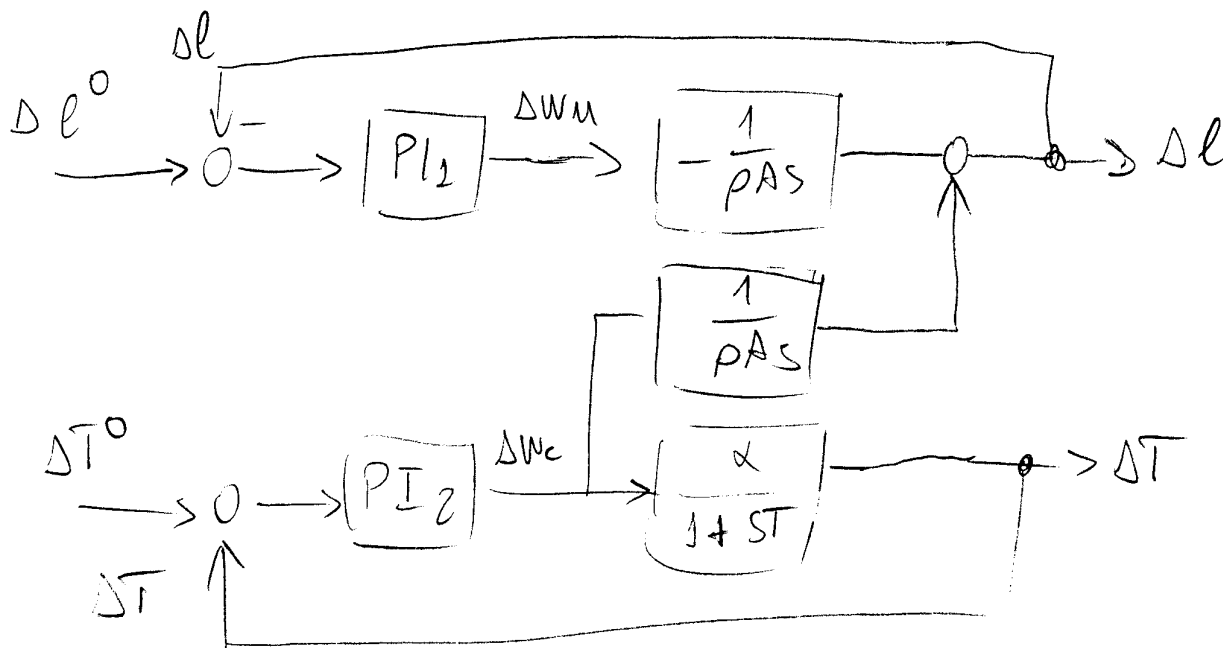
$w_u \leftrightarrow e$

$w_1 \leftrightarrow T$

-  $Y(s) = G(s) U(s)$

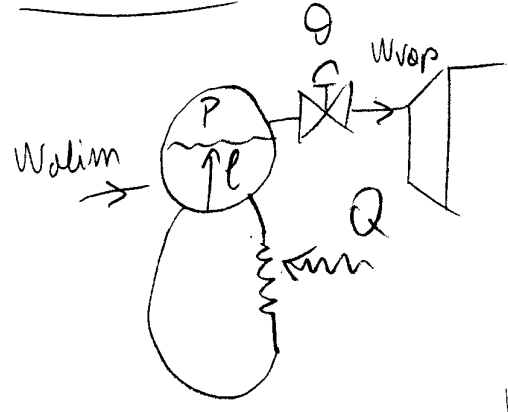
$$\begin{bmatrix} \Delta L \\ \Delta T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho AS} & \frac{1}{\rho AS} \\ 0 & \frac{\alpha}{1+ST} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta W_M \\ \Delta W_1 \end{bmatrix}$$

- Progetto il regolatore di livello  $R_1$  : il regolatore vede la fct  $-\frac{1}{\rho AS}$  tra  $\Delta W_M$  e  $\Delta L \rightarrow$  solito regolatore PI
- Progetto il regolatore di temperatura  $R_2$  : grazie alla struttura triangolare di  $G(s)$ , il regolatore vede una fct tra  $\Delta W_1$  e  $\Delta T$  che vale  $\frac{\alpha}{1+ST}$ , ed è indipendente da  $R_1 \rightarrow$  ancora regolatore PI



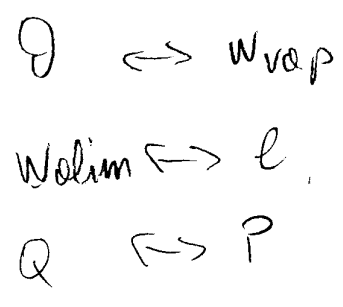
- Nei casi in cui  $G(s)$  è "piena", la chiusura dell'anello tra  $u_1$  e  $y_1$  modifica la  $fdt$  tra  $u_2$  e  $y_2$  → occorre tenerne conto, chiudendo prima l'anello più veloce, poi quello più lento, ed eventualmente re-tarando quello + veloce

- ESEMPIO 2 GENERATORE DI VAPORE SATURO



- Var. di controllo:
  - $W_{olim}$  portata alimento
  - $Q$  flusso termico agli evaporatori
  - $\vartheta$  apertura valvola
- Var. controllate
  - $e$  livello
  - $W_{vap}$  portata vapore
  - $P$  pressione

- Strategia 1: "Caldiera-segue"



- La valvola di turbina viene usata per regolare la portata di vapore; il controllo è agevole dato che la risposta di  $w_{vap}$  a scalino su  $Q$  è istantanea
- la portata di alimento regola il livello nel corpo cilindrico
- Il flusso termico viene usato per regolare la pressione

- Strategia 2 : "Turbina segue"

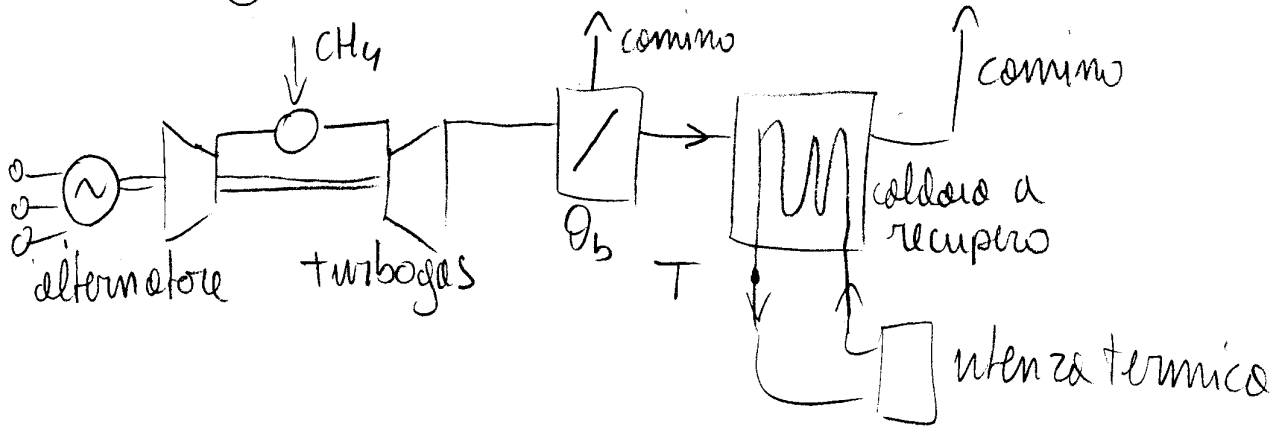
$$Q \leftrightarrow P$$

$$w_{alim} \leftrightarrow l$$

$$Q \leftrightarrow w_{vap}$$

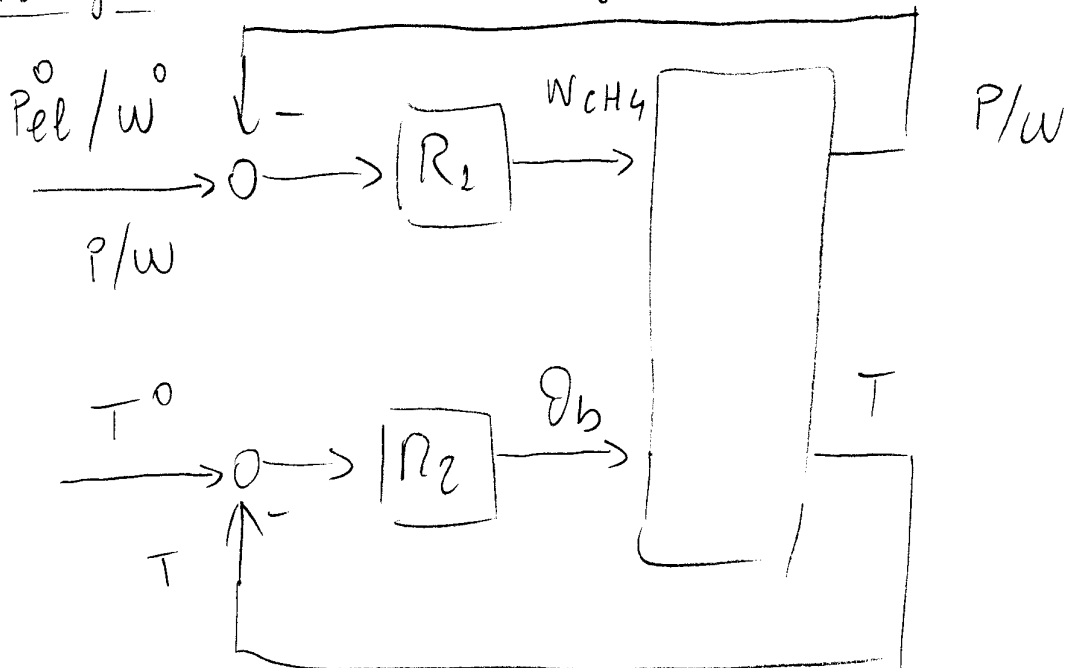
- In questo caso l'apertura della valvola di turbina viene usata per regolare la pressione, e la portata di vapore generato viene regolata col flusso termico. Il sistema controllato è più lento, però non viene sottoposto a stress termici quando si varia la richiesta di carico turbina

- Esempio (3) Impianto di cogenerazione



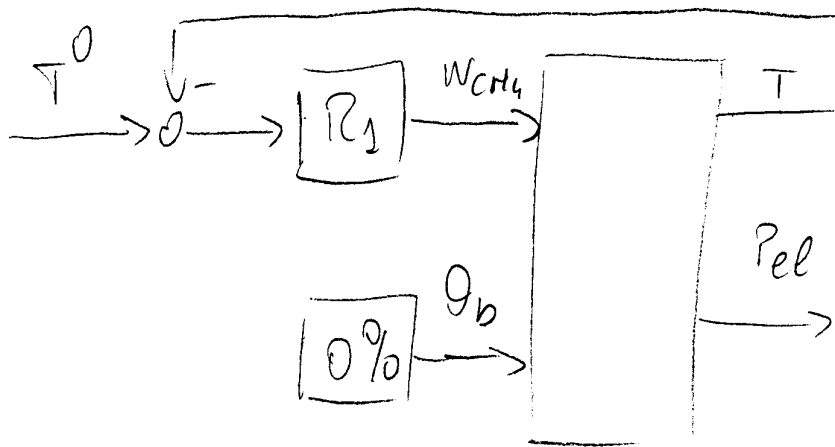
- Var. di controllo  $W_{CH_4}$  portata gas naturale
- $Q_b$  apertura sponde by pass caldoia
- Var. controllo  $P_{el} / w$  potenza / frequenza alternatore
- $T$  temperatura acqua calda

- Strategia 1: carico elettrico guida



→ È possibile modulare indipendentemente il carico elettrico e quello termico; per avere capacità di controllo, una parte dei fumi caldi è bypassata al camino (basso rendimento)

- Strategia 2 carico termico guida



→ Tutti i fumi caldi sono usati in caldaia (max rendimento)

Il carico elettrico prodotto dipende dal carico termico

Non è possibile lavorare in isola

## - EQUILIBRIO E LINEARIZZAZIONE

- Calcolare condizioni di equilibrio ed equazioni linearizzate attorno alle condizioni di equilibrio per i modelli ③, ④, ⑤

## - FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

- Calcolare le funzioni di trasferimento tra ingressi e usate (o tra variazioni degli ingressi e delle usate) per i sistemi ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧



- SOLUZIONI (EQUILIBRIO E LINEARIZZAZIONE)

3) Sorbaloio con valvola

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\rho A} (d - K u \sqrt{x}) \\ y = x \end{cases}$$

- Equilibrio:  $\bar{d} - K \bar{u} \sqrt{\bar{x}} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \left( \frac{\bar{d}}{K \bar{u}} \right)^2$

- Linearizzazione:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = - \frac{K \bar{u}}{2 \rho A \sqrt{\bar{x}}} \Delta x - \frac{K \sqrt{\bar{x}}}{\rho A} \Delta u - \frac{1}{\rho A} \Delta d \\ \Delta y = \Delta x \end{cases}$$

4) Scaldo bagno

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{M} d_1 d_2 - \frac{1}{M} x d_1 + \frac{1}{Mc} u \\ y = x \end{cases}$$

- Equilibrio  $\bar{d}_1 \bar{d}_2 - \bar{x} \bar{d}_1 + \frac{1}{c} \bar{u} = 0$

$$\begin{array}{ccc} \bar{T} & \bar{T}_i & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \bar{x} = \bar{d}_2 + \frac{\bar{u}}{c \bar{d}_1} & & \end{array}$$

↙ Q  
↑ W

- Linearizzazione

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = - \frac{1}{M} \bar{d}_2 \Delta x + \frac{1}{Mc} \Delta u - \frac{\bar{u}}{Mc \bar{d}_1} \Delta d_1 + \frac{\bar{d}_1}{M} \Delta d_2 \\ \Delta y = \Delta x \end{cases}$$

⑤ Caldora

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{\Gamma} d_1 d_2 - \frac{1}{\Gamma} x d_1 + \frac{KS}{Mc} (x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{\Gamma_m c_m} (u - KS (x_2 - x_1)) \\ y = x_1 \end{cases}$$

- Equilibrio

$$\begin{array}{c} T \\ \downarrow \\ \bar{x}_1 = \bar{d}_2 + \frac{\bar{u} \leftarrow Q}{c \bar{d}_1} \\ \uparrow W \end{array}$$

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \frac{\bar{u}}{KS}$$

- Linearizzazione

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_1 = - \left( \frac{\bar{d}_1}{\Gamma} + \frac{KS}{Mc} \right) \Delta x_1 + \frac{KS}{Mc} \Delta x_2 - \frac{\bar{u}}{\Gamma c \bar{d}_1} \Delta d_1 + \frac{\bar{d}_1}{\Gamma} \Delta d_2 \\ \Delta \dot{x}_2 = \frac{KS}{\Gamma_m c_m} \Delta x_1 - \frac{KS}{\Gamma_m c_m} \Delta x_2 + \frac{1}{\Gamma_m c_m} \Delta u \\ \Delta y = \Delta x_1 \end{cases}$$

- SOLUZIONI (FDT)

$$(2) L(s) = -\frac{1}{\rho A s} U(s) + \frac{1}{\rho A s} D(s)$$

$$(3) \Delta L(s) = -\frac{\alpha}{1+s\tau} \Delta A_V(s) + \frac{\beta}{1+s\tau} \Delta W_i(s)$$

$$\alpha = \frac{2\bar{v}}{\bar{A}_V}, \quad \beta = \frac{2\sqrt{x}}{K\bar{A}_V}, \quad \tau = \frac{2\rho A\sqrt{x}}{K\bar{A}_V}$$

Nota: il sistema è tanto più lento quanto più il livello di equilibrio è alto e la valvola di scarico è chiusa

$$(4) \Delta T(s) = \frac{\alpha}{1+s\tau} \Delta Q(s) - \frac{\beta}{1+s\tau} \Delta W(s) + \frac{1}{1+s\tau} \Delta T_i(s)$$

$$\alpha = \frac{1}{\bar{w}_c}; \quad \beta = \frac{\bar{Q}}{\bar{w}_c^2}; \quad \tau = \frac{M}{\bar{w}}$$

Nota: il sistema è tanto più lento quanto più è grande lo massa accumulata e piccola la portata fluente

# ESERCIZI

(5)

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad \Delta T(s) &= \frac{1}{c\bar{w}} \frac{1}{1+s(\tau_m+\bar{\tau}+\tau_i)+s^2\bar{\tau}\tau_m} \Delta Q + \\ &+ \frac{\bar{Q}}{c\bar{w}^2} \frac{1+s\bar{\tau}_m}{1+s(\tau_m+\bar{\tau}+\tau_i)+s^2\bar{\tau}\tau_m} \Delta W + \\ &+ \frac{1+s\bar{\tau}_m}{1+s(\tau_m+\bar{\tau}+\tau_i)+s^2\bar{\tau}\tau_m} \Delta T_i \end{aligned}$$

$$\hat{c} = \frac{M}{\bar{w}} \quad \tau_i = \frac{\Gamma_m c_m}{w c} \quad \tau_m = \frac{\Gamma_m c_m}{k s}$$

Nota:  $(1+s(\tau_m+\bar{\tau}+\tau_i)+s^2\bar{\tau}\tau_m) = (1+s\tau_1)(1+s\tau_2)$

$$\tau_{1,2} = \frac{2\bar{\tau}\tau_m}{\tau_m+\bar{\tau}+\tau_i \pm \sqrt{(\tau_m+\bar{\tau}+\tau_i)^2 - 4\bar{\tau}\tau_m}}$$

se  $\tau_i \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{aligned} \tau_1 &\rightarrow \bar{\tau} \\ \tau_2 &\rightarrow \tau_m \end{aligned}$

- In generale il processo è tanto più lento quanto più sono elevate le masse coinvolte e ridotte le portate e i coefficienti di scambio
- Grazie alla presenza degli zeri, la temperatura risponde più rapidamente a  $\Delta W$  e  $\Delta T_i$  rispetto che a  $\Delta Q$

# ESERCIZI

6

$$\textcircled{6} \quad P(s) = \frac{1}{ms^2 + hs + k} \quad F(s) = \frac{1}{K} \frac{1}{1 + \frac{h}{K}s + \frac{m}{K}s^2} \quad F(s)$$

$$\text{poli } p_{1,2} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4km}}{2m}$$

se  $h^2 > 4km \rightarrow$  2 poli reali :

$$\hat{c}_{1,2} = -\frac{1}{p_{1,2}}$$

$$\frac{1}{K} \frac{1}{(1 + s\hat{c}_1)(1 + s\hat{c}_2)}$$

se  $h^2 < 4km \rightarrow$  2 poli complessi

$$\frac{1}{K} \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{h^2}{4km}}$$

$\textcircled{7}$  Pendolo all'ingiù

$$\Delta Y(s) = \frac{e}{mg} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{mgl}s + \frac{l}{g}s^2\right)} \quad F(s)$$

Pendolo all'insù

$$\Delta Y(s) = \frac{e}{mg} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{mgl}s - \frac{l}{g}s^2\right)} \quad F(s)$$

## ESERCIZI

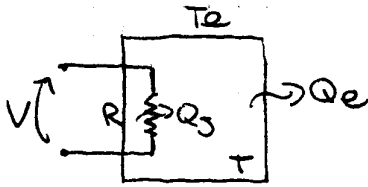
(7)

(8) Rete RC

$$I(s) = \frac{1}{R} \frac{s\tilde{c}}{1+s\tilde{c}} U(s)$$

$$\tilde{c} = RC$$

① TERMOFONE



$$x = T$$

$$u = Q_3$$

$$d = T_e$$

$$y_1 = T$$

$$y_2 = Q_e$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{kA}{cM} x + \frac{1}{cM} u + \frac{kA}{cM} d \\ y_1 = x \\ y_2 = kA (x - d) \end{cases}$$

$\bar{e}$  LINEARE

$$\begin{cases} sX(s) = -\frac{kA}{cM} X(s) + \frac{1}{cM} U(s) + \frac{kA}{cM} D(s) \\ Y_1(s) = X(s) \\ Y_2(s) = kA (X(s) - D(s)) \end{cases}$$

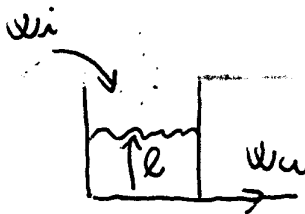
$$\Rightarrow \frac{kA}{cM} \left(1 + \frac{cM}{kA} s\right) X(s) = \frac{1}{cM} U(s) + \frac{kA}{cM} D(s)$$

$$Y_1(s) = \frac{\alpha_1}{(1+\beta s)} U(s) + \frac{1}{(1+\beta s)} D(s)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{kA} \quad \beta = \frac{cM}{kA}$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{(1+\beta s)} U(s) - \frac{kA \beta s}{(1+\beta s)} D(s)$$

② SERBATOIO A PORTATE IMPRESSE



$$\begin{aligned} x &= e \\ u &= w_u \\ d &= w_i \\ y &= e \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{pA} (d - u) \\ y = x \end{cases}$$

IL SISTEMA È LINEARE

PASSO AL DOMINIO DELLA FREQUENZA

$$\begin{cases} s X(s) = \frac{1}{pA} D(s) - \frac{1}{pA} U(s) \\ Y(s) = X(s) \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{1}{pAs} D(s) - \frac{1}{pAs} U(s)$$

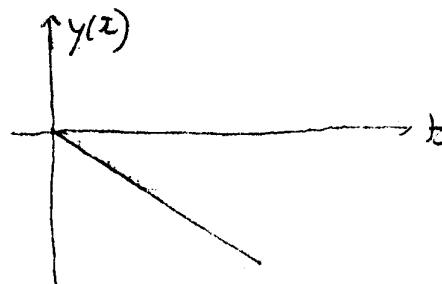
$$u(t) = \text{scam}(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$$

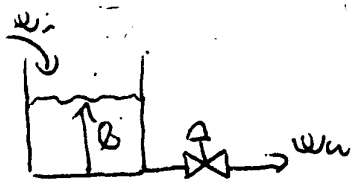
$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s G(s) = \nu = -\frac{1}{pA}$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

$$y(t) = -\text{scam}(t)$$



③ SERBATOIO CON VALVOLE



$$\begin{aligned} x &= e \\ u &= A v \\ d &= w_i \\ y &= e \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{pA} (d - u A_v \sqrt{x}) \\ y = x \end{cases}$$

IL SISTEMA NON È LINEARE  $\Rightarrow$  LINEARIZZO NEGL'INTORNO DELL'EQUILIBRIO



$$\Rightarrow \dot{x} = 0$$

$$0 = \frac{1}{\rho A} (\bar{d} - \kappa \bar{u} \sqrt{\bar{x}}) \Rightarrow \bar{x} = \left( \frac{\bar{d}}{\kappa \bar{u}} \right)^2$$

$$\bar{y} = \bar{x} = \left( \frac{\bar{d}}{\kappa A v} \right)^2$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = \frac{1}{\rho A} \Delta d - \frac{\kappa \bar{u}}{2\rho A \sqrt{\bar{x}}} \Delta x - \frac{\kappa \sqrt{\bar{x}}}{\rho A} \Delta u \\ \Delta y = \Delta x \end{cases}$$

$$\begin{cases} s \Delta X(s) = \frac{1}{\rho A} \Delta D(s) - \frac{\kappa \bar{u}}{2\rho A \sqrt{\bar{x}}} \Delta X(s) - \frac{\kappa \sqrt{\bar{x}}}{\rho A} \Delta U(s) \\ \Delta Y(s) = \Delta X(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\kappa \bar{u}}{2\rho A \sqrt{\bar{x}}} \left( 1 + \frac{2\rho A \sqrt{\bar{x}}}{\kappa \bar{u}} s \right) \Delta X(s) = \frac{1}{\rho A} \Delta D(s) - \frac{\kappa \sqrt{\bar{x}}}{\rho A} \Delta U(s)$$

$$\Delta Y(s) = \frac{\alpha_1}{1 + \tau s} \Delta D(s) - \frac{\alpha_2}{1 + \tau s} \Delta U(s)$$

$$\alpha_1 = \frac{2\sqrt{\bar{x}}}{\kappa \bar{u}} \quad \alpha_2 = \frac{2\bar{x}}{\bar{u}} \quad \tau = \frac{2\rho A \sqrt{\bar{x}}}{\kappa \bar{u}}$$

$$u(t) = \text{sca}(t) \Rightarrow Y(s) = \frac{-\alpha_2}{s(1 + \tau s)}$$

$$Y(0) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 0$$

$$Y'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = -\frac{\alpha_2}{\tau} = -\frac{\rho A \sqrt{\bar{x}}}{\kappa}$$

$$Y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = -\alpha_2$$



#### 4) SULDABAGNO



$$\begin{aligned} x &= T \\ u &= Q \\ d_1 &= \omega \\ d_2 &= T_1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{M} d_1 d_2 - \frac{1}{M} x d_1 + \frac{1}{Mc} u \\ y = x \end{cases}$$

IL SISTEMA NON È LINEARE  $\Rightarrow$  LINEARIZZO NELL'INTORNO  
DELL'EQUILIBRIO

$$\Rightarrow \dot{X} = 0$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{M} \bar{d}_1 \bar{d}_2 - \frac{1}{M} \bar{x} \bar{d}_1 + \frac{1}{M c} \bar{u} \Rightarrow \bar{x} = \bar{d}_2 + \frac{13}{c \bar{d}_1} \\ \bar{y} = \bar{x} \end{cases}$$

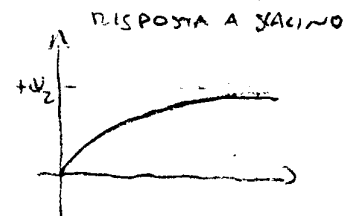
$$\begin{cases} \Delta \dot{X} = -\frac{\bar{d}_1}{M} \Delta X + \frac{1}{M} (\bar{d}_2 - \bar{x}) \Delta d_1 + \frac{\bar{d}_1}{M} \Delta d_2 + \frac{1}{M c} \Delta u \\ \Delta Y = \Delta X \end{cases}$$

$$\begin{cases} s \Delta X(s) = -\frac{\bar{d}_1}{M} \Delta X(s) + \frac{1}{M} (\bar{d}_2 - \bar{x}) \Delta D_1 + \frac{\bar{d}_1}{M} \Delta D_2(s) + \frac{1}{M c} \Delta U(s) \\ \Delta Y(s) = \Delta X(s) \end{cases}$$

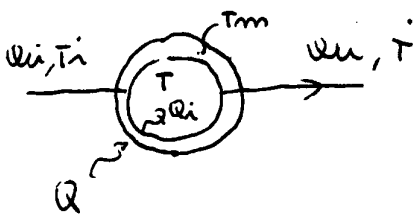
$$\Rightarrow \frac{\bar{d}_1}{M} \left(1 + \frac{M}{\bar{d}_1} s\right) \Delta X(s) = \frac{1}{M} (\bar{d}_2 - \bar{x}) \Delta D_1 + \frac{\bar{d}_1}{M} \Delta D_2(s) + \frac{1}{M c} \Delta U(s)$$

$$Y(s) = \frac{\alpha_1}{1 + \tau s} \Delta D_1(s) + \frac{1}{1 + \tau s} \Delta D_2(s) + \frac{\alpha_2}{1 + \tau s} \Delta U(s)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\bar{d}_1} (\bar{d}_2 - \bar{x}) & \alpha_2 &= \frac{1}{\bar{d}_1 c} & \tau &= \frac{M}{\bar{d}_1} \\ &= \frac{1}{\bar{d}_1} \left(\bar{d}_2 - \bar{d}_2 + \frac{13}{c \bar{d}_1}\right) & &= \frac{13}{c \bar{d}_1^2} & & \end{aligned}$$



5) CALDAIA



$$x_1 = T$$

$$x_2 = T_m$$

$$u = Q$$

$$d_1 = \omega$$

$$d_2 = T_i$$

$$y = T$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{M} d_1 d_2 - \frac{1}{M} x_1 d_1 + \frac{k_A}{M c} (x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{M m c m} (\bar{u} - k_A (x_2 - x_1)) \\ y = x_1 \end{cases}$$

IL SISTEMA NON È LINEARE  $\Rightarrow$  LINEARIZZO INTORNO ALL'EQUIL.

$$\dot{x}_1 = 0 \quad \dot{x}_2 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{M m c m} (\bar{u} - k_A (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)) \Rightarrow \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = \frac{\bar{u}}{k_A}$$

$$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{M} \bar{d}_1 \bar{d}_2 - \frac{1}{M} \bar{x}_1 \bar{d}_1 + \frac{k_A}{M c} (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{M} \bar{d}_1 \bar{d}_2 - \frac{1}{M} \bar{x}_1 \bar{d}_1 + \frac{\bar{u}}{M c}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 = \bar{d}_2 + \frac{\bar{u}}{\bar{d}_1 c}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \frac{\bar{u}}{k_A} = \bar{d}_2 + \left( \frac{1}{\bar{d}_1 c} + \frac{1}{k_A} \right) \bar{u}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \bar{x}_1$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_1 = -\frac{1}{M} \left( \bar{d}_1 + \frac{k_A}{c} \right) \Delta x_1 + \frac{k_A}{M c} \Delta x_2 + \frac{1}{M} (\bar{d}_2 - \bar{x}_1) \Delta d_1 + \frac{\bar{d}_1}{M} \Delta d_2 \\ \Delta \dot{x}_2 = + \frac{k_A}{M m c m} \Delta x_1 - \frac{k_A}{M m c m} \Delta x_2 + \frac{1}{M m c m} \Delta u \\ \Delta y = \Delta x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s \Delta X_1(s) = -\frac{1}{M} \left( \bar{d}_1 + \frac{k_A}{c} \right) \Delta X_1(s) + \frac{k_A}{M c} \Delta X_2(s) + \frac{\bar{u}}{M \bar{d}_1 c} \Delta D_1(s) + \frac{\bar{d}_1}{M} \Delta D_2 \\ s \Delta X_2(s) = + \frac{k_A}{M m c m} \Delta X_1(s) - \frac{k_A}{M m c m} \Delta X_2(s) + \frac{1}{M m c m} \Delta U(s) \\ \Delta Y(s) = \Delta X_1(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{uA}{MmCm} \left( 1 + \frac{MmCm}{uA} s \right) \Delta X_2(s) = \frac{uA}{MmCm} \Delta X_1(s) + \frac{1}{MmCm} \Delta U(s)$$

$$\Rightarrow \Delta X_2(s) = \frac{1}{1 + \tau_2 s} \Delta X_1(s) + \frac{\frac{1}{uA}}{1 + \tau_2 s} \Delta U(s)$$

$$\text{con } \tau_2 = \frac{MmCm}{uA}$$

$$\left( s + \frac{\bar{d}_1}{M} + \frac{uA}{Mc} - \frac{\frac{uA}{Mc}}{1 + \tau_2 s} \right) \Delta X_1(s) = \frac{uA}{Mc} \cdot \frac{1}{uA} \frac{1}{(1 + \tau_2 s)} \Delta U(s) +$$

$$+ \frac{\bar{u}}{M\bar{d}_1 c} \Delta D_1(s) + \frac{\bar{d}_1}{M} \Delta D_2(s)$$

CONSIDERO I 2 TERMINI CHE MOLTIPLICA  $\Delta X_1(s)$

$$\frac{s + \tau_2 s^2 + \frac{\bar{d}_1}{M} + \frac{\bar{d}_1}{M} \tau_2 s + \frac{uA}{Mc} + \frac{uA}{Mc} \frac{MmCm}{uA} s - \frac{uA}{Mc}}{(1 + \tau_2 s)} = \frac{\bar{d}_1}{M} \frac{(1 + (\tau_2 \bar{d}_1 + \tau_3) s + \tau_1 \tau_2 s^2)}{(1 + \tau_2 s)}$$

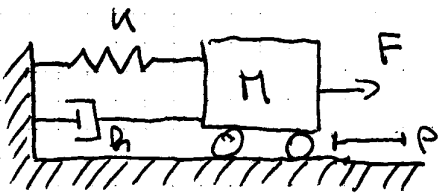
$$\text{con } \tau_1 = \frac{M}{\bar{d}_1} \quad \tau_3 = \frac{MmCm}{Mc} \cdot \frac{M}{\bar{d}_1} = \frac{MmCm}{c \bar{d}_1}$$

$$\Delta Y(s) = \frac{M}{\bar{d}_1} \cdot \frac{1}{Mc} \frac{1}{1 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) s + \tau_1 \tau_2 s} \Delta U(s) +$$

$$+ \frac{M}{\bar{d}_1} \frac{\bar{u}}{M\bar{d}_1 c} \frac{1 + \tau_2 s}{(1 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) s + \tau_1 \tau_2 s)} \Delta D_1(s)$$

$$+ \frac{M}{\bar{d}_1} \frac{\bar{d}_1}{M} \frac{1 + \tau_2 s}{(1 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) s + \tau_1 \tau_2 s)} \Delta D_2(s)$$

⑥ SISTEMA MASSA-MOLLA



$$x_1 = p$$

$$x_2 = v$$

$$u = F$$

$$y = p$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{M} x_1 - \frac{B}{M} x_2 + \frac{1}{M} u \\ y = x_1 \end{cases}$$

LINEARE

$$\begin{cases} sX_1(s) = X_2(s) \\ sX_2(s) = -\frac{k}{M} X_1(s) - \frac{B}{M} X_2(s) + \frac{1}{M} U(s) \\ Y(s) = X_1(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{B}{M} \left( 1 + \frac{M}{B} s \right) X_2(s) = -\frac{k}{M} X_1(s) + \frac{1}{M} U(s)$$

$$\Rightarrow X_2(s) = -\frac{\frac{k}{B}}{1 + \frac{M}{B} s} X_1(s) + \frac{\frac{1}{B}}{1 + \left(\frac{M}{B}\right) s} U(s)$$

$$\Rightarrow \left( s + \frac{\frac{k}{B}}{\left(1 + \frac{M}{B} s\right)} \right) X_1(s) = \frac{\frac{1}{MB}}{\left(1 + \frac{M}{B} s\right)} U(s)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{k}{B} \left( 1 + \frac{B}{k} s + \frac{B}{k} \frac{M}{B} s^2 \right)}{\left( 1 + \frac{M}{B} s \right)} X_1(s) = \frac{\frac{1}{MB}}{\left( 1 + \frac{M}{B} s \right)} U(s)$$

$$\Rightarrow Y(S) = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{b}{k}S + \frac{M}{k}S^2} U(S)$$

~~$$\Rightarrow Y(S) = \frac{1}{M} \frac{1}{S^2 + \frac{b}{M}S + \frac{k}{M}} U(S)$$~~

$$\text{polo}_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4kM}}{2M}$$

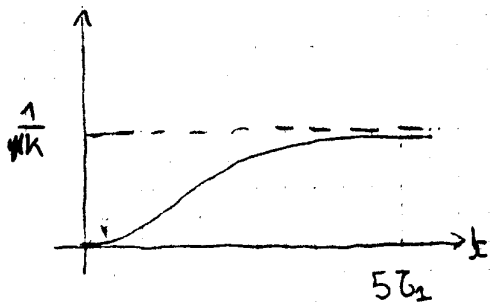
se  $b^2 > 4kM \Rightarrow$  2 poli REALI

$$\tau_{1,2} = -\frac{1}{p_{1,2}}$$

~~$$\frac{1}{k} \frac{1}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$~~

con  $\tau_1 > \tau_2 > 0$

con  $u(t) = sca(t)$



$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s G(s) = 0$$

$$\ddot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 G(s) = \frac{\mu}{\tau_1 \tau_2}$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \mu = \frac{1}{k}$$

se  $b^2 < 4kM \Rightarrow$  poli complessi coniugati

$$\frac{1}{\omega_m^2} = \frac{M}{k} \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_m} = \frac{b}{k} \Rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{b^2 k}{4k^2 M}} = \sqrt{\frac{b^2}{4kM}}$$

$$Y(S) = \frac{1}{k} \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_m} s + \frac{1}{\omega_m^2} s^2}$$

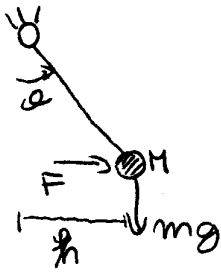


$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s G(s) = 0$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{1}{k}$$

⑦ PENDOLO SEMPLICE



$$x_1 = \alpha$$

$$x_2 = \psi$$

$$u = F$$

$$y = l \sin \alpha$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m l} u \cos x_1 - \frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{h}{m e^2} x_2 \\ y = l \sin x_1 \end{cases}$$

EQUILIBRIO  $x \bar{u} = 0$

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = \frac{1}{m l} \bar{u} \cos \bar{x}_1 - \frac{g}{l} \sin \bar{x}_1 - \frac{h}{m e^2} \bar{x}_2 \\ \bar{y} = l \sin \bar{x}_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin \bar{x}_1 = 0 \begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_1 = \pi \end{cases}$$

$$\bar{y} = 0$$

PEN DOLO IN GU  $\bar{x}_1 = 0$

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 = \left( -\frac{\sin \bar{x}_1 \bar{u}}{m l} - \frac{g}{l} \cos \bar{x}_1 \right) \Delta x_1 - \frac{h}{m e^2} \Delta x_2 + \frac{\cos \bar{x}_1}{m l} \Delta u \\ \Delta y = l \cos \bar{x}_1 \Delta x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s \Delta x_1(s) = \Delta x_2(s) \Rightarrow \Delta x_2(s) = \frac{1}{s} \Delta x_1(s) \\ s \Delta x_2(s) = -\frac{g}{l} \Delta x_1(s) - \frac{h}{m e^2} \Delta x_2(s) + \frac{1}{m l} \Delta U(s) \\ \Delta y(s) = l \Delta x_1(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x_2(s) \left( s + \frac{g}{e s} + \frac{h}{m e^2} \right) = \frac{1}{m l} \Delta U(s)$$

$$\Rightarrow \Delta \dot{x}_1(s) = \frac{g}{e s} \left( 1 + \frac{h}{m e g} s + \frac{e}{g} s^2 \right) = \frac{1}{m e} \Delta U(s)$$

$$\Rightarrow \Delta x_2(s) = \frac{1}{m g} \frac{s}{\left( 1 + \frac{h}{m e g} s + \frac{e}{g} s^2 \right)} \Delta U(s)$$

$$\Delta y(s) = \frac{e}{m g} \frac{1}{\left( 1 + \frac{h}{m e g} s + \frac{e}{g} s^2 \right)} \Delta U(s)$$