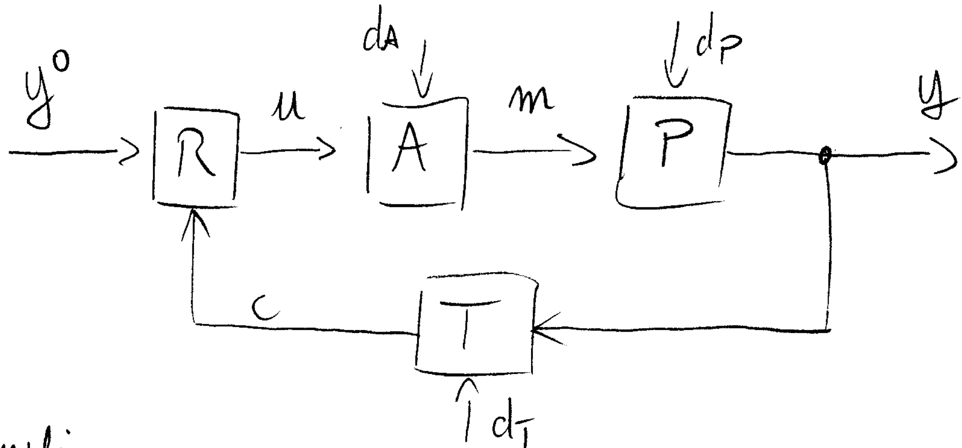
SISTEMA CONTROLLO

- SCHEMA BASE DEL SISTEMA DI CONTROLLO IN RETROAZIONE



- Segnali

y^o: setpoint / riferimento / valore desiderato di y

u: variabile di controllo (valore desiderato)

m: variabile di controllo (valore effettivo, fisico)

y: variabile controllata

c: misura della variabile controllata

d_A: disturbi attuatore

d_P: disturbi processo

d_T: disturbi misura

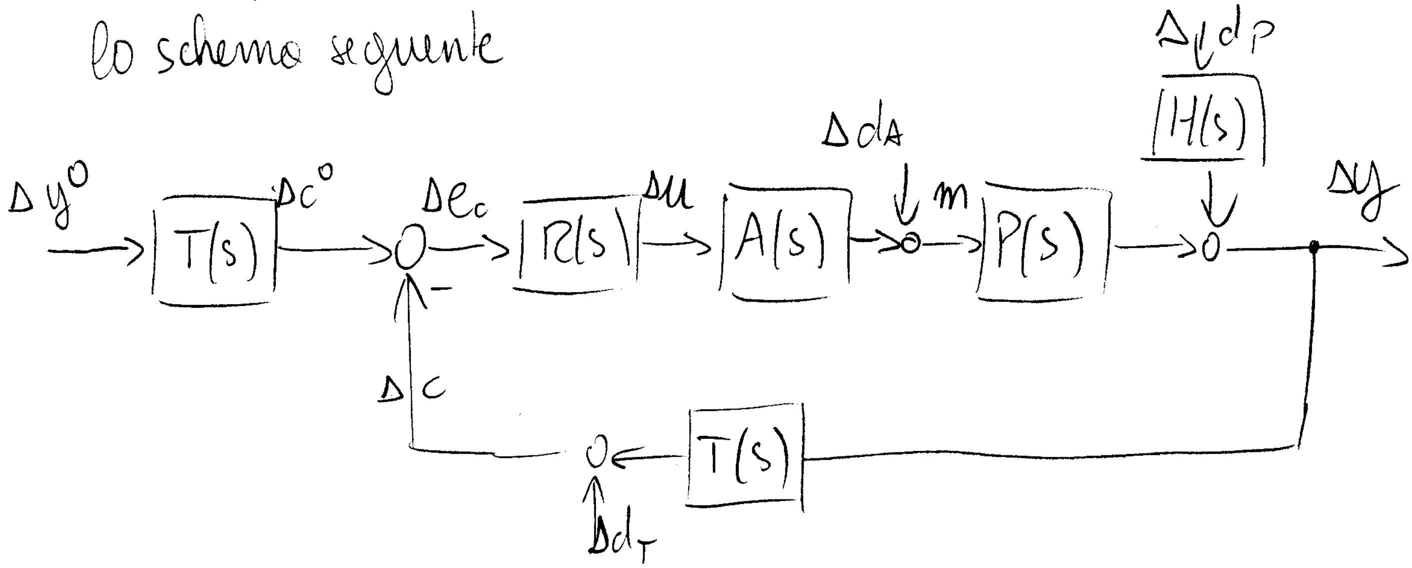
- Blocco P: processo da controllare

- Blocco A: attuatore: riceve un segnale dal sistema di controllo e lo "traduce" in una variabile fisica (esempi: valvola, riscaldatore elettrico, azionamento pompa a giri variabili)
di norma funge da amplificatore di potenza

- Blocco T: trasduttore/sensore: misura y e lo converte in un segnale compatibile con la tecnologia del regolatore

- Blocco R: regolatore/sistema di controllo, in base a y^o e c, decide i valori di u per avere $y \simeq y^o$

- In generale, A, P, T, R sono sistemi dinamici, possibilmente non lineari. Nell'intorno di un punto di lavoro del sistema, è possibile descriverli con buona approssimazione tramite i corrispondenti sistemi linearizzati. Si ottiene quindi lo schema seguente



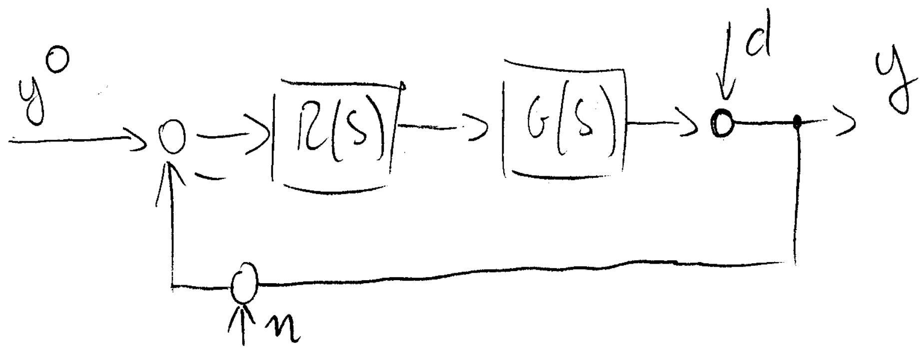
- Si è scelto qui di far dipendere u da e_c, cioè dalla differenza tra i valori desiderato e misurato di y. Sono possibili anche scelte differenti (regolatori a 2 gradi di libertà) su cui non ci soffermiamo

→ Nel seguito omettiamo i Δ per semplicità!!

SISTEMA DI CONTROLLO

- In molti casi la dinamica dei sensori e/o degli attuatori è molto più veloce di quella del processo da controllare, per cui si approssimano le relative f.d.t con i loro guadagni statici $A(s) \simeq \mu_A$ $\quad T(s) \simeq \mu_T$. In altri casi invece questa dinamica è significativa (p.es. termocoppie in un regolatore di temperatura)

- Lo schema è equivalente al seguente:



con $G(s) = A(s) \cdot P(s) \cdot T(s)$ — dinamica del processo "strumentato"

$d = H(s)d_P + P(s)d_A$ — disturbi in linea d'andata

$n = T(s)^{-1} d_T$ — disturbi in linea di retroazione

- OBIETTIVI DEL SISTEMA DI CONTROLLO

- Idealmente vorremmo che fosse

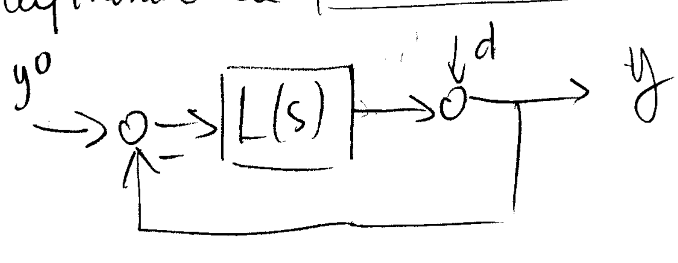
$$\frac{Y(s)}{Y^o(s)} = 1$$ inseguimento del riferimento

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = 0$$ reiezione del disturbo

SISTEMA CONTROLLO

- REQUISITI SISTEMA DI CONTROLLO
  - Analizzeremo ora i quattro requisiti o specifiche fondamentali del sistema di controllo
    1. Stabilità
    2. Prestazioni statiche
    3. Prestazioni dinamiche
    4. Moderazione del controllo

- STABILITÀ
  - Il sistema di controllo deve essere stabile in anello chiuso per poter funzionare correttamente. Limitiamo l'analisi al caso in cui sia $R(s)$ che $G(s)$ abbiano poli con $\mathrm{Re}(p) \leq 0$
  - Richiamiamo l'analisi di stabilità dei sistemi ad anello chiuso; definendo la funzione d'anello $L(s) = R(s)G(s)$



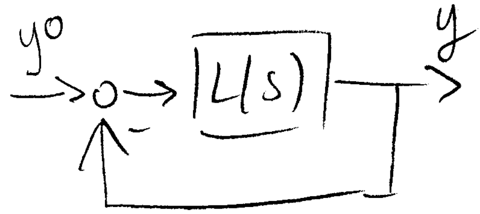
$$L(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\frac{Y}{Y^o} = \frac{L}{1+L}$$

- Il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile se
  - Il polinomio caratteristico $\chi(s) = N(s) + D(s)$ ha radici con $\mathrm{Re}(p) < 0$
  - Eventuali cancellazioni polo/zero quando si forma il prodotto $R(s) \cdot G(s)$ riguardano poli e zeri con $\mathrm{Re}(p) < 0$ (-> le parti 'nascoste' della dinamica sono as. stabili)

- Problema: capire come la scelta di $R(s)$ (cioè il progetto del regolatore) influenza la stabilità (cioè la posizione delle radici di $\chi(s)$) non è semplice. Occorre infatti fattorizzare un polinomio di ordine anche elevato, i cui coefficienti dipendono dai parametri del regolatore
- Per rendere più trasparente questo legame, si possono impiegare i cosiddetti criteri di stabilità per sistemi retroazionati, che valutano la stabilità del sistema ad anello chiuso (cioè la posizione delle radici di $\chi(s)$) in base alle caratteristiche della sola funzione d'anello $L(s)$
- Nell'ambito di questo corso faremo riferimento al criterio di Bode

- CRITERIO DI BODE



- Ipotesi di applicabilità

① $L(s)$ ha poli con $\mathrm{Re}(p) \leq 0$

② $|L(j\omega)| = 1$ per un solo valore di $\omega \triangleq \omega_c$
(pulsazione critica)
<u>ovvero</u> il diagramma di Bode del modulo attraversa l'asse 0dB una sola volta in ω_c

<u>Def.</u> $\varphi_c = \measuredangle L(j\omega_c)$ sfasamento critico (di norma è <u>negativo</u>)

<u>Def.</u> $\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$ margine di fase

→ Th: il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

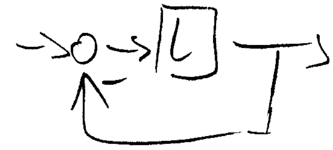
① • $\mu_L > 0$

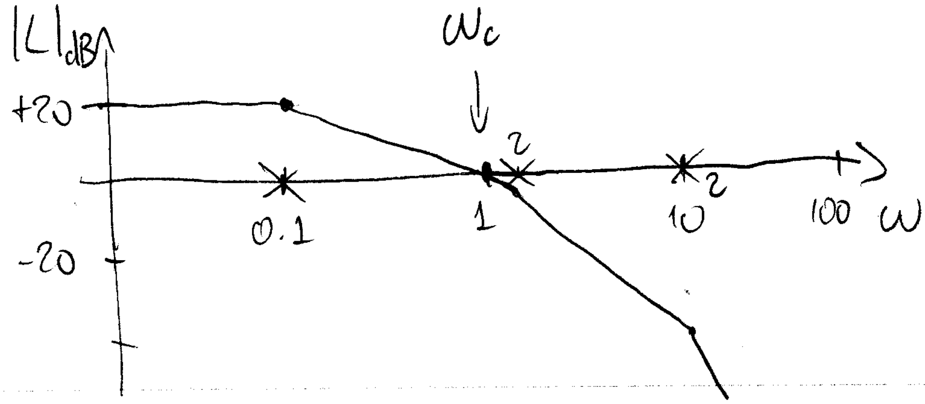
② • $\varphi_m > 0$ ovvero $\varphi_c > -180^\circ$

①: "Correggo gli errori nella direzione giusta"

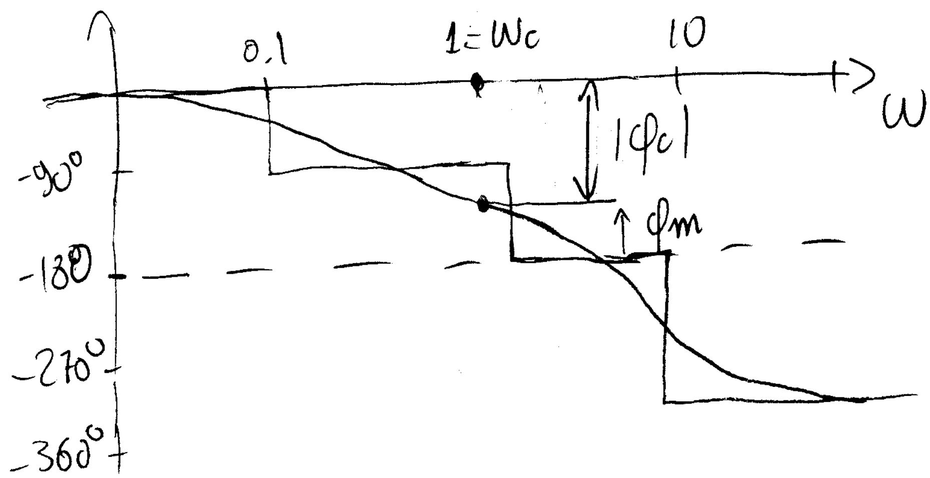
②: "Senza un eccessivo ritardo"

- Esempio 1 $L(s)=\dfrac{10}{(1+10s)(1+0.5s)(1+0.1s)^2}$





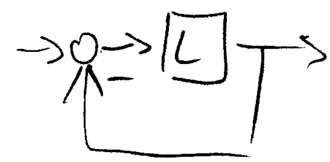
$\omega_c \simeq 1$ rad/s



$$\varphi_c = -\arctan(10\cdot 1) - \arctan(0.5\cdot 1) - 2\arctan(0.1\cdot 1) =$$
$$= -84° - 26° - 11° = -121°$$

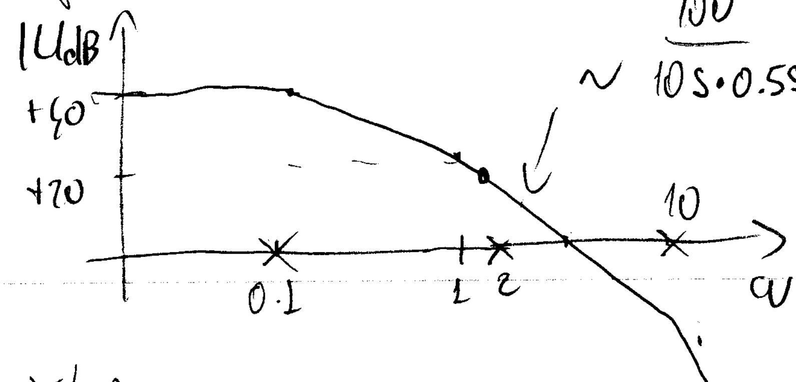
$$\left.\begin{aligned} &\varphi_m = 180° - 121° = 59° > 0 \\ &\mu_L = +10 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ sistema ad a.c. <u>as. stabile</u>

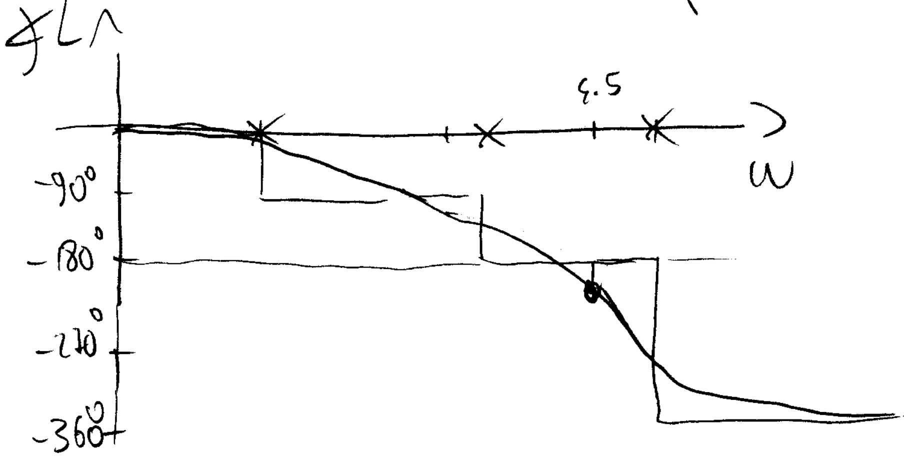
– Esempio 2 $\quad L(s) = \dfrac{100}{(1+10s)(1+0.5s)(1+0.1s)^2}$



(aumentato il guadagno)

$$\sim \frac{100}{10s \cdot 0.5s} = \frac{20}{s^2} \Rightarrow \omega_c = \sqrt{20} \simeq 4.5$$





$$\varphi_c = -\arctan(4.5 \cdot 10) - \arctan(4.5 \cdot 0.5) - 2\arctan(4.5 \cdot 0.1) =$$
$$= -89^\circ - 66^\circ - 48^\circ = -203^\circ$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_m = 180^\circ - 203^\circ = -23^\circ < 0 \\ &\mu_L > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{sistema instabile!}$$

- Osservazioni:

1. Appare chiaro come tutto ciò che provoca sfasamenti negativi nella risposta in frequenza del sistema da controllore (poli negativi, zeri positivi, ritardi puri) sia "nemico" della stabilità, in quanto riduce il margine di fase

2. Occorrerà quindi che il regolatore $R(s)$ introduca un anticipo di fase attorno ad ω_c per garantire la stabilità

3. Tramite il criterio di Bode è relativamente agevole comprendere come eventuali modifiche ad $R(s)$ (e quindi a $G(s)$) influenzino la stabilità del sistema retroazionato

- PRESTAZIONI STATICHE
  - In generale, è auspicabile che, a transitorio esaurito, l'errore $e = y^0 - y$ sia piccolo
  - Valutiamo questo errore a fronte di variazioni a scalino di y^0, d_P, d_T, mediante il th. del valore finale

a) Errore dovuto al riferimento

$$\frac{E(s)}{Y(s)} = \frac{1}{1+L(s)} = S(s) \quad \text{funzione di sensitività}$$

sia $L(s) = \frac{\mu}{s^g} \cdot (\dots)$ forma μ/cdt

$g = \#$integratori R + $\#$integratori G ; $\mu = \mu_R \cdot \mu_G$

$$e_\infty = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot S(s) \cdot \frac{1}{s} = S(0)$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{s^g}{s^g + \mu} = \begin{cases} \frac{1}{1+\mu} & \text{se } g = 0 \\ 0 & \text{se } g > 0 \\ 1 & \text{se } g < 0 \end{cases}$$

- Se non c'è azione integrale, l'errore è finito; cala al crescere di μ
- Se c'è azione integrale, l'errore è zero
- Se $L(s)$ ha zeri nell'origine l'uscita non si muove ($y(\infty) = 0$)

b) Errore dovuto al disturbo sul processo

$$\frac{E(s)}{Dp(s)} \quad \frac{H(s)}{1+L(s)} = H(s)\cdot S(s) \qquad H = \frac{\mu_H}{s^{g_h}}$$

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\, H(s)\, S(s)\, \frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s\to 0} H(s)S(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} \mu_H \frac{s^{g-g_h}}{s^g+\mu} = \begin{cases} \frac{\mu_H}{1+\mu} & \text{se } g = g_h = 0 \\ \frac{\mu_H}{\mu} & \text{se } g = g_h > 0 \\ 0 & \text{se } g > g_h \end{cases}$$

- Di nuovo l'errore diventa piccolo per μ elevati, e si annulla in presenza di "sufficiente" azione integrale

c) Errore dovuto al disturbo di retroazione

$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = F(s) = \frac{Y(s)}{Y^o(s)}$$

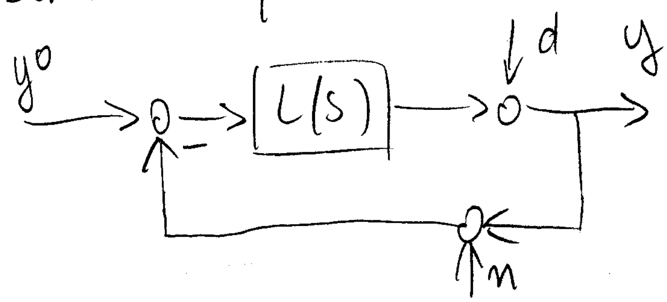
$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{L(s)}{1+L(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{\mu}{s^g+\mu} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\mu}{1+\mu} \simeq 1 & \text{se } g = 0 \\ 1 & \text{se } g > 0 \end{cases}$$

- Gli errori statici di misura si ripercuotono inevitabilmente sulla precisione statica del sistema

- PRESTAZIONI DINAMICHE

Schema di riferimento:



Valutiamo le f.d.t.

$\dfrac{Y(s)}{Y^0(s)}$ inseguimento setpoint

$\dfrac{Y(s)}{D(s)}$ reiezione disturbi andata

$\dfrac{Y(s)}{N(s)}$ reiezione disturbi retroazione

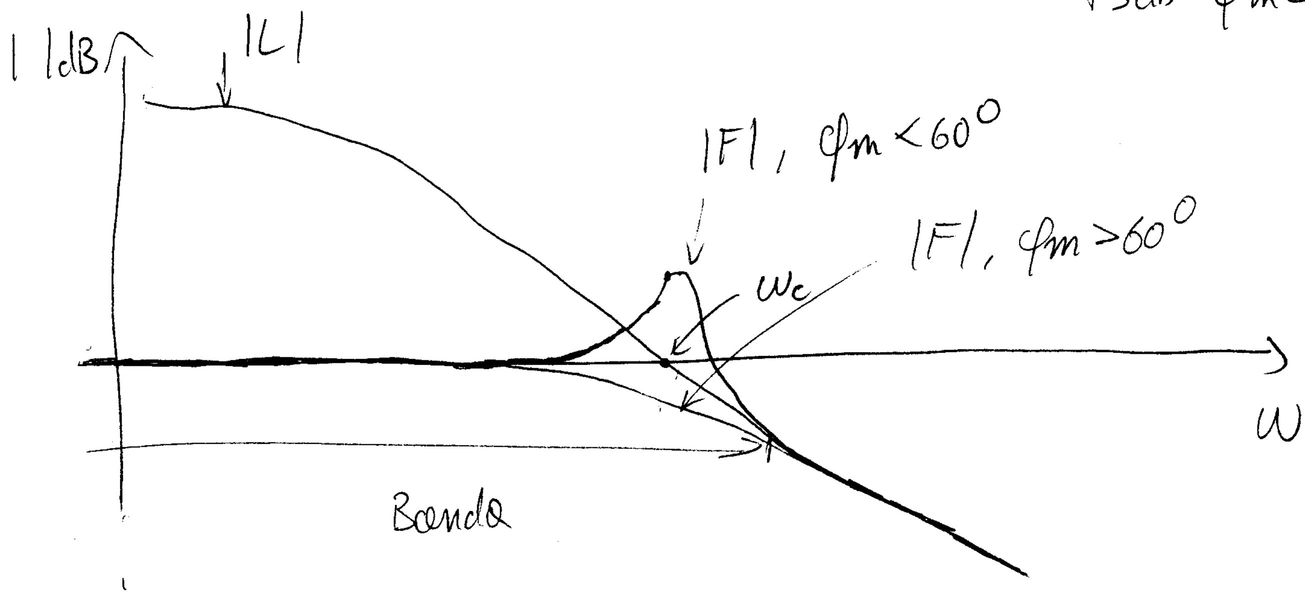
- INSEGUIMENTO DEL SETPOINT

$$F(s) = \frac{Y(s)}{Y^0(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

→ Supponiamo che $L(s)$ soddisfi le hp. di applicabilità del criterio di Bode

$$|F(j\omega)| \simeq \begin{cases} 1 & \text{per } |L(j\omega)| >> 1, \text{ cioè } \omega << \omega_c \\ |L(j\omega)| & \text{per } |L(j\omega)| << 1, \text{ cioè } \omega >> \omega_c \end{cases}$$

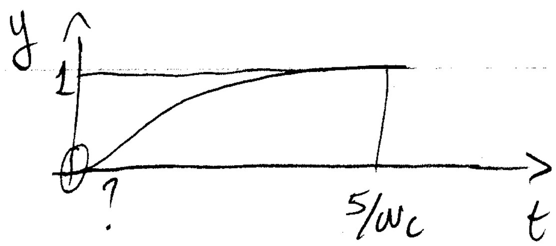
$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{|1+e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{2\sin\frac{\varphi_m}{2}} = \begin{cases} -3\,dB & \varphi_m = 90^\circ \\ 0\,dB & \varphi_m = 60^\circ \\ +3\,dB & \varphi_m = 40^\circ \end{cases}$$



- Caso A $\varphi_m > 60^\circ \Rightarrow F(s) \sim \dfrac{1}{1+\dfrac{s}{\omega_c}}$

La risposta del sistema in prima approssimazione assomiglia ad un passa-basso del 1° ordine, con costante di tempo $T = \dfrac{1}{\omega_c}$ e $T_{ass} = \dfrac{5}{\omega_c}$

$y^0 = sca(t) \Rightarrow$



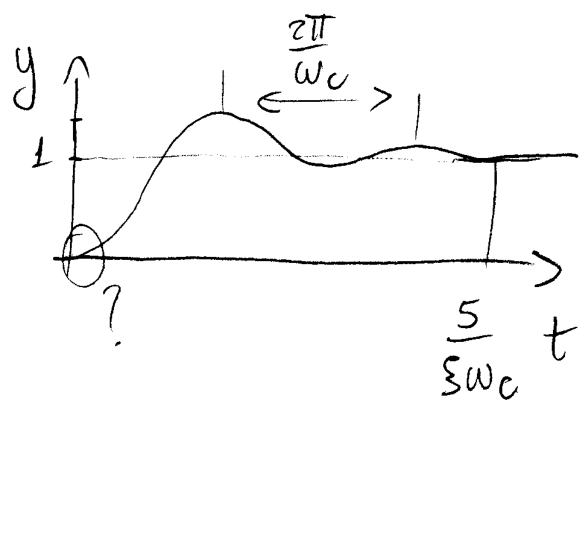
Ovviamente l'andamento iniziale dipende dal comportamento in alta frequenza di $F(s)$ che non è catturato dall'approssimazione

- Caso B $\varphi_m < 60^\circ \Rightarrow F(s) \sim \dfrac{1}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_n}s+\dfrac{1}{\omega_n^2}s^2}$

La risposta del sistema assomiglia ad un passa-basso con due poli complessi coniugati; risulta

$\omega_n \simeq \omega_c$ $\qquad \xi = \sin\dfrac{\varphi_m}{2} \simeq \dfrac{\varphi_m^\circ}{100}$ $\qquad T_{ass} \simeq \dfrac{5}{\xi\omega_c}$

$y^0 = sca(t) \Rightarrow$



SISTEMA DI CONTROLLO

- Def: Banda del sistema di controllo: intervallo di frequenze in cui $-3dB < |F(j\omega)|_{dB} < +3dB$

- In pratica la banda si può approssimare con l'intervallo $0 \vdash\!\dashv \omega_c$

- Le componenti di $y(t)$ a pulsazioni inferiori ad ω_c vengono inseguite fedelmente, quelle a pulsazioni superiori vengono attenuate

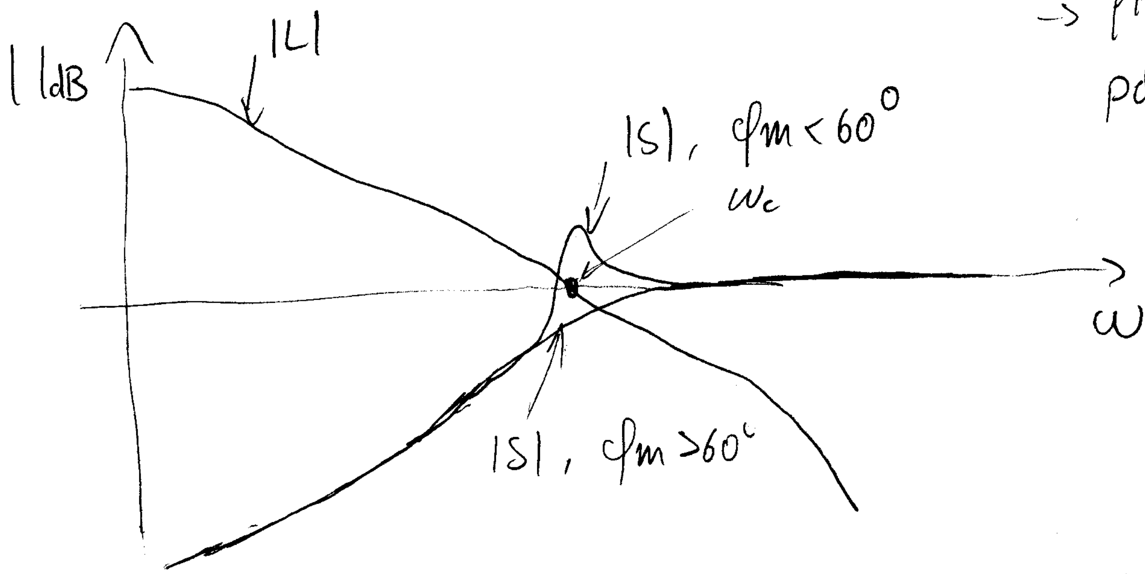
- Se φ_m è basso (meno di $40°$) il sistema di controllo presenta un picco di risonanza marcato nella risposta in frequenza $F(j\omega)$, che è indesiderabile

- REIEZIONE DISTURBO LINEA ANDATA

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1+L(s)} = S(s) \quad \text{(funzione di sensitività)}$$

$$|S(j\omega)| \simeq \begin{cases} \dfrac{1}{|L(j\omega)|} & \text{per } |L(j\omega)| \gg 1, \text{ cioè } \omega \ll \omega_c \\ 1 & \text{per } |L(j\omega)| \ll 1, \text{ cioè} \end{cases}$$

$$|S(j\omega_c)| = \frac{1}{|1+e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{2\sin\frac{\varphi_m}{2}}$$



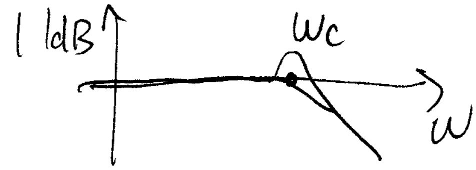
→ filtro passa-alto

- Le componenti di $d(t)$ a pulsazioni inferiori ad ω_c vengono attenuate, tanto più quanto più è alto il guadagno d'anello; quelle invece a pulsazioni $> \omega_c$ passano sostanzialmente invariate; se φ_m è basso, le componenti a pulsazioni $\sim \omega_c$ sono addirittura amplificate

→ In sintesi, vengono attenuate solo le componenti armoniche del disturbo all'interno della banda del sistema

- REIEZIONE DEL DISTURBO IN LINEA DI RETROAZIONE

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{L(s)}{1+L(s)} = -F(s)$$



- A parte il segno, è la stessa fdt tra setpoint e uscita

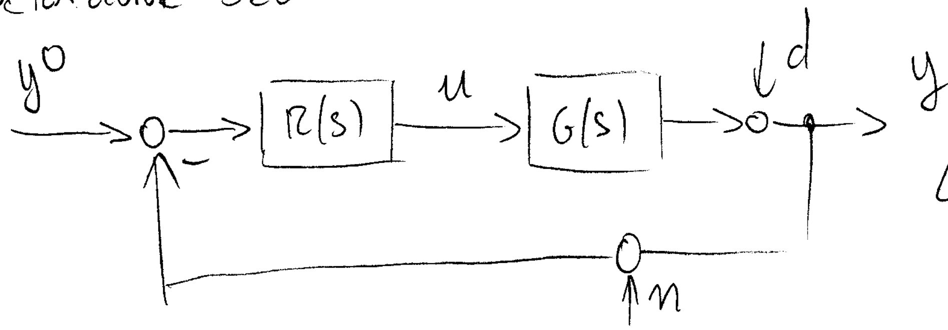
→ Le componenti di $n(t)$ in banda vengono inseguite con precisione, quelle a frequenze più elevate vengono attenuate come $L(j\omega)$

- In presenza di disturbi rilevanti ad alta frequenza, è opportuno limitare la banda ed avere bassi $|L(j\omega)|$ alle frequenze del disturbo

- In generale le prestazioni di inseguimento del setpoint e quelle di reiezione dei disturbi di misura sono in conflitto tra loro, ed occorre raggiungere un compromesso accettabile

- Se si richiedono prestazioni spinte in termini di inseguimento del setpoint e/o di reiezione del disturbo d'andata, occorre che il sensore abbia un basso livello di rumore anche ad alta frequenza

- MODERAZIONE DEL CONTROLLO



$L(s) = R(s)\,G(s)$

- Consideriamo ora il segnale di controllo u

$$\frac{U(s)}{Y^0(s)} = \frac{R(s)}{1+R(s)G(s)} = \frac{R(s)}{1+L(s)} \triangleq Q(s)$$ sensitività del controllo

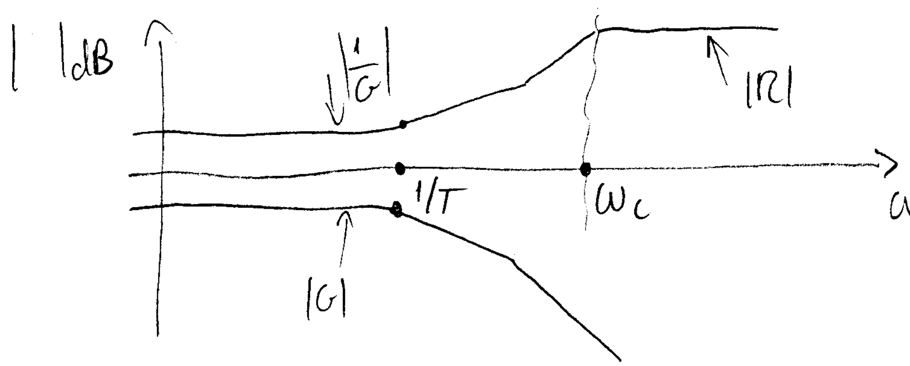
$$\frac{U(s)}{D(s)} = \frac{U(s)}{N(s)} = -Q(s)$$ $\Rightarrow$ in modulo, le fdt $y^0 \to u$, $d \to u$, $n \to u$ sono le stesse

- In generale, è opportuno che $|Q(j\omega)|$ non sia mai troppo grandi, per evitare eccessive sollecitazioni del controllo

$$|Q(j\omega)| \simeq \begin{cases} \dfrac{1}{|G(j\omega)|} & \text{per } \omega \ll \omega_c \\ |R(j\omega)| & \text{per } \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

(1) E' opportuno che $|R(j\omega)|$ sia contenuta in alta frequenza

(2) Se $G(s)$ è di tipo passa-basso, con un polo dominante di costante di tempo T, non si può spingere ω_c troppo oltre $\frac{1}{T}$



se non si vuole che $|Q(j\omega)|$ si alzi troppo intorno ad ω_c

- OSSERVAZIONI IMPORTANTI

(1) Nell'ipotesi di validità del criterio di Bode, è possibile valutare approssimativamente le prestazioni dinamiche del sistema da due soli parametri di $L(j\omega_c)$, cioè ω_c e φ_m

(2) È evidente che la presenza di poli/zeri addizionali con $\omega = \frac{1}{T} >> \omega_c$ non può alterare significativamente la pulsazione critica ω_c, e non può alterare più di tanto il margine di fase: termini del tipo $\arctan(\omega_c T)$ quando $\frac{1}{T} \geq 10\,\omega_c$ valgono meno di $6°$

Pertanto le dinamiche a frequenza $>> \omega_c$ sono ininfluenti sulle prestazioni dinamiche del controllo, e possono quindi essere trascurate nella descrizione del processo tramite $G(s)$; in altre parole, la dinamica significativa ai fini del controllo va da 0 rad/s (prestazioni statiche) a circa $10\,\omega_c$

(3) Se il margine di fase è sufficientemente elevato, è evidente che variazioni del $10 \div 20\%$ nel guadagno e nelle costanti di tempo di $G(s)$ non mutano sostanzialmente la stabilità e le prestazioni statiche e dinamiche del sistema di controllo. In questo caso, quindi, le prestazioni sono "robuste" rispetto all'incertezza parametrica sulla dinamica del processo da controllare

- PROGETTO DEL REGOLATORE
  - L'analisi condotta ha evidenziato che le prestazioni del sistema di controllo dipendono dalla funzione d'anello $L(s)$
    - guadagno, tipo → prestazioni statiche
    - ω_c, φ_m → prestazioni dinamiche
  - Ora, supponendo che il processo e la strumentazione (e quindi $G(s)$) siano dati, il progetto del regolatore consiste nel trovare $R(s)$ tale per cui $L(s) = R(s)\,G(s)$ rispetta le specifiche del sistema di controllo.
  - Tratteremo qui il problema in termini generali, affrontando poi in specifico il progetto di regolatori PID

- SISTEMI A FASE MINIMA
  - Sia $G(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)} e^{-\tau s}$ $\quad$ $N(s)$, $D(s)$ polinomi
    $\mathrm{Re}(P) \leq 0$ (→ hp criterio Bode)

il termine $e^{-\tau s}$ corrisponde ad un ritardo puro addizionale (oltre alla dinamica descritta da $\frac{N(s)}{D(s)}$) tra ingresso e uscita

ad es. se $y(t) = u(t-\tau)$

$$Y(s) = \underbrace{e^{-\tau s}}_{G(s)} U(s)$$

- Def $G(s)$ ha fase minima se $\Re(z_i) < 0$, $\tau = 0$

ovvero

no zeri positivi, no ritardo

$G(s)$ ha fase non minima altrimenti

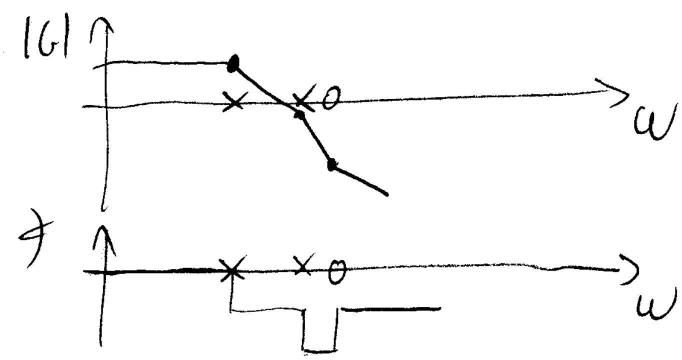
ovvero

$\exists$ zeri positivi e/o $\exists$ ritardo

- Proprietà dei diagrammi di Bode (asintotici)

• fase minima $\measuredangle G(j\omega)\big|_{asintotico} = \dfrac{90^\circ}{20\,^{dB}/_{dec}} \dfrac{d\,|G(j\omega)|_{dB}}{d\omega}$

diagramma fase $\Leftrightarrow$ pendenza diagramma modulo



• fase non minima $\measuredangle G(j\omega)\big|_{asint.} \leq \dfrac{90^\circ}{20\,^{dB}/_{dec}} \dfrac{d\,|G(j\omega)|_{dB}}{d\omega}$

il contributo di zeri positivi e del ritardo dà uno sfasamento negativo più grande rispetto al caso a fase minima

- PROGETTO DI MASSIMA - CASO A FASE MINIMA

• Supponiamo $G(s)$ a fase minima

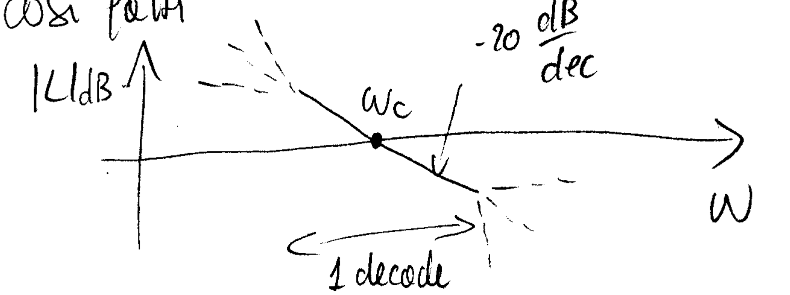
• Costruiamo $R(s)$ a fase minima (poli e zeri $Re<0$)

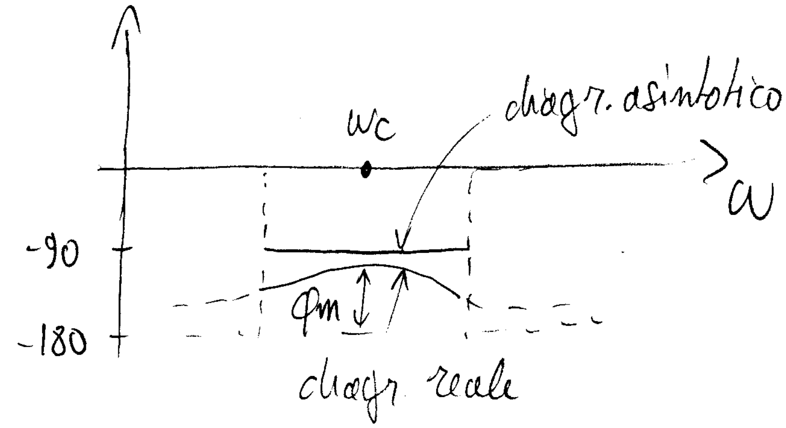
→ $L(s)$ ha fase minima

- Scegliendo opportunamente guadagno, poli e zeri di $R(s)$ è sempre possibile:

(1) Fare sì che $L(s)$ abbia guadagno e tipo tali da rispettare le specifiche statiche: errore a transitorio esaurito piccolo o addirittura nullo, introducendo poli nell'origine in $R(s)$

(2) Fare sì che i diagrammi di Bode di $L(s)$ siano così fatti





- Se il diagramma del modulo taglia l'asse 0dB con $-20\frac{dB}{dec}$ di pendenza, e la mantiene per un tratto lungo almeno una decade, il diagramma della fase sarà prossimo ai 90°, e quindi anche $\varphi_m \sim 90°$

- In linea di principio si può ottenere un ω_c (e quindi prestazioni dinamiche) arbitrariamente veloce; in pratica al crescere di ω_c
  - cresce $|Q(s)| \Rightarrow$ cresce l'intensità del controllo
  - si allarga la banda di $\frac{Y(s)}{N(s)} \Rightarrow$ maggiore ripercussione delle componenti ad alta frequenza nel rumore di misura

- <u>NB</u>: è possibile che quando si forma la funzione d'anello $L(s) = R(s)G(s)$ poli di G si cancellino con zeri di R, zeri di G si cancellino con poli di R

ora, per ipotesi $R(s)$ e $G(s)$ hanno fase minima: se quindi si <u>evitano</u> cancellazioni polo/zero <u>nell'origine</u>, le dinamiche nascoste che si creano hanno $Re(p) < 0$, cioè sono asintoticamente stabili, e non creano problemi

- PROGETTO DI MASSIMA - CASO A FASE NON MINIMA

→ Supponiamo $G(s) = G_{pm}(s) \cdot G'(s)$

$G_{pm}(s)$: parte a fase minima

$G'(s)$: ritardi zeri positivi

- Il termine $G'(s)$ non può essere cancellato da $R(s)$

  - Non posso cancellare uno zero $(1-s\tau)$ con un polo $\frac{1}{1-s\tau}$ perchè creerei una dinamica nascosta <u>instabile</u>
  - Non posso cancellare il ritardo $e^{-\tau s}$ perché mi occorrerebbe un anticipo puro $e^{+\tau s}$ (un oracolo, o un veggente) che non è fisicamente realizzabile

$\Rightarrow L(s) = L_{pm}(s) \cdot G'(s)$

$$\varphi_c = \measuredangle L(j\omega_c) = \measuredangle L_{pm}(j\omega_c) + \measuredangle G'(j\omega_c)$$

$\measuredangle L_{pm}(j\omega_c) \simeq -90^\circ$ perchè il diagramma del modulo scende di $-20\,dB/dec$

$\measuredangle G'(j\omega_c)$: sfasamento addizionale ineliminabile

- Supponiamo di richiedere $\varphi_m > 40^\circ$

$$\Rightarrow \varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| = 180^\circ + \varphi_c \simeq 90^\circ + \underbrace{\measuredangle G'(j\omega_c)}_{\text{negativo}}$$

(1) zero positivo $(1-s\tau)$

$$\varphi_m = 90^\circ - \arctan(\omega_c \tau) > 40^\circ$$

$$\arctan(\omega_c \tau) < 50^\circ \qquad \boxed{\omega_c < \frac{1.2}{\tau}}$$

(2) Ritardo $e^{-\tau s}$

$$\varphi_m = 90^\circ + \measuredangle e^{-j\omega_c\tau} = 90^\circ - \frac{180}{\pi}\omega_c\tau > 40^\circ$$

$$\omega_c \tau < \frac{50}{180}\pi \qquad \boxed{\omega_c < \frac{0.87}{\tau}}$$

→ In ogni caso è impossibile che la banda del sistema superi in maniera sostanziale la barriera $\frac{1}{\tau}$

- La presenza di fenomeni a fase non minima (ritardi, zeri positivi) nel processo da controllare può limitare drasticamente la velocità di risposta e le prestazioni dinamiche in genere del sistema di controllo (cfr il caso della regolazione di temperatura della doccia, dove era presente un ritardo)

⇒ Se questo non permette di soddisfare le specifiche richieste non si può più intervenire su $R(s)$ ma occorrerà riprogettare il processo da controllare in modo da ridurre o eliminare i fenomeni a fase non minima

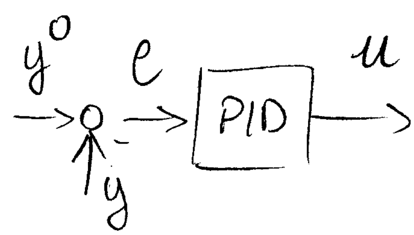
- In generale quindi si può dire che il controllo di sistemi a fase non minima è "difficile"

- In un certo senso sono "difficili" da controllare anche sistemi a fase minima, ma caratterizzati da poli molto lenti (con costanti di tempo elevate). In questo caso però non esistono "barriere" invalicabili per la banda del sistema di controllo; piuttosto, l'azione della variabile di controllo u e l'effetto del rumore di misura diventeranno progressivamente più forti all'aumentare di ω_c, fino a risultare "praticamente" inaccettabili

REGOLATORI PID

- INTRODUZIONE
  - In linea di principio, il regolatore $R(s)$ può avere una dinamica complessa, descritta da molti poli e zeri.
  - In pratica, però, un numero molto rilevante di problemi di controllo di interesse pratico è risolvibile con una classe particolare di regolatori detti PID (Proporzionale - Integrale - Derivativo)

- PID IDEALE
  - Descrizione nel dominio del tempo



$$u(t) = \underbrace{K_P \cdot e(t)}_{\text{parte proporzionale}} + \underbrace{K_I \cdot \int_0^t e(\tau)\,d\tau}_{\text{parte integrale}} + \underbrace{K_D\, \dot{e}(t)}_{\text{parte derivativa}}$$

K_P: costante proporzionale
K_I: " integrale
K_D: " derivativa

Possibili i sottocasi P, I, PI, PD se si azzerano alcune costanti

  - Descrizione nel dominio della frequenza

$$U(s) = \left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s\right) E(s)$$

o alternativamente

$$U(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right) E(s)$$

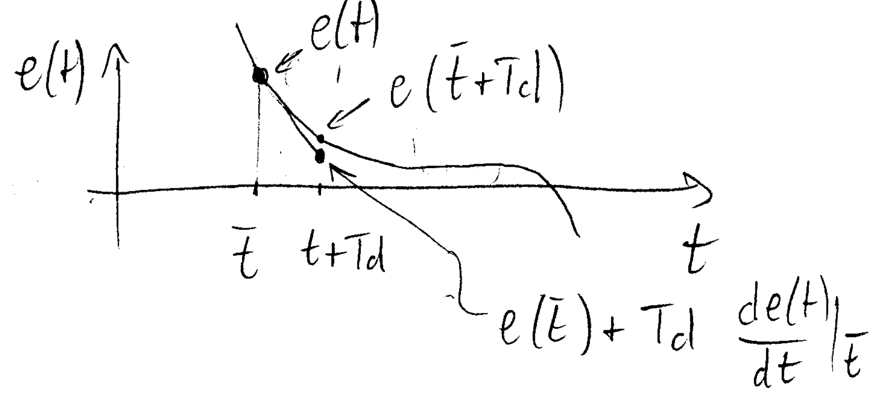
T_i: tempo integrale
T_d: tempo derivativo

REGOLATORI PID

- Il termine integrale garantisce errore nullo a transitorio esaurito (cfr prestazioni statiche): l'unico modo per avere $\int_0^t e(\tau)d\tau$ costante a regime è che $e(t) \to 0$

da solo però non è sufficiente (di solito) perchè introduce un ritardo di fase di $90°$ a tutte le ω, che può destabilizzare la dinamica ad anello chiuso

- Il termine proporzionale permette di recuperare fase in media frequenza (vedremo perchè)
- Il termine derivativo introduce un anticipo nella risposta, utile a compensare gli sfasamenti negativi dei poli del processo; la derivata di $e(t)$ mi dice in anticipo "dove andrà a finire" l'errore



REGOLATORE PID

– PID REALE

– la fdt del PID ideale vale

$$R(s) = K_p\left(1+\frac{1}{sT_i}+sT_d\right) = K_p\,\frac{1+sT_i+s^2T_iT_d}{sT_i}\ :$$

2 zeri
1 polo nell'origine

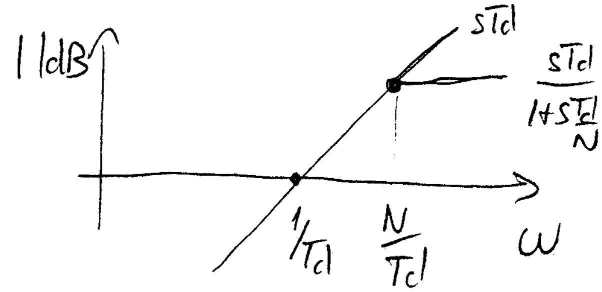
#zeri > #poli ⇒ fdt impropria, non realizzabile

– Il problema è causato dal termine derivativo puro, che risponderebbe con un impulso ad un ingresso a scalino

– si risolve il problema approssimando il termine derivativo

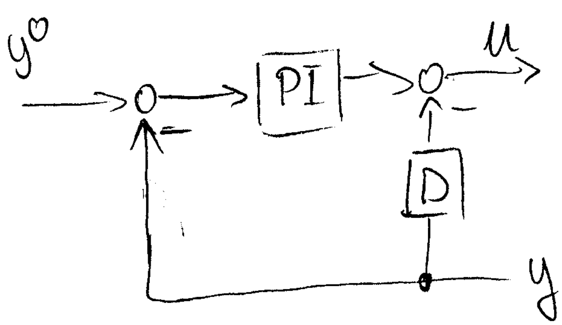
$$sT_d \rightarrow \frac{sT_d}{1+s\frac{T_d}{N}}$$

$N = 3 \div 30$



– la fdt del PID reale risulta quindi $R(s) = K_p\,\dfrac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}{sT_i\left(1+s\frac{T_d}{N}\right)}$

– Esistono poi numerosissime varianti del PID reale: ad esempio



In questo modo la parte derivativa è presente nell'anello (dove introduce anticipo di fase per migliorare φm), ma non sul riferimento, per evitare picchi di u(t) quando y°(t) varia bruscamente

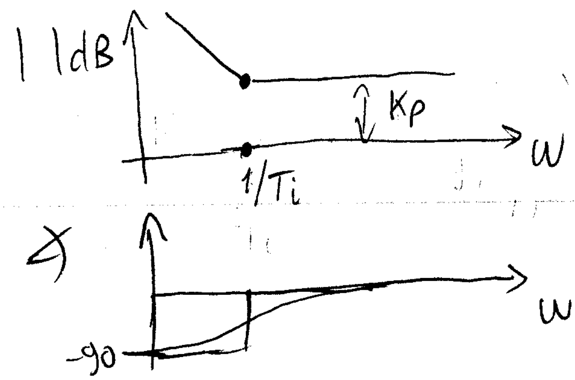
– Una trattazione esaustiva va però oltre gli obiettivi del corso

REGOLATORI PID

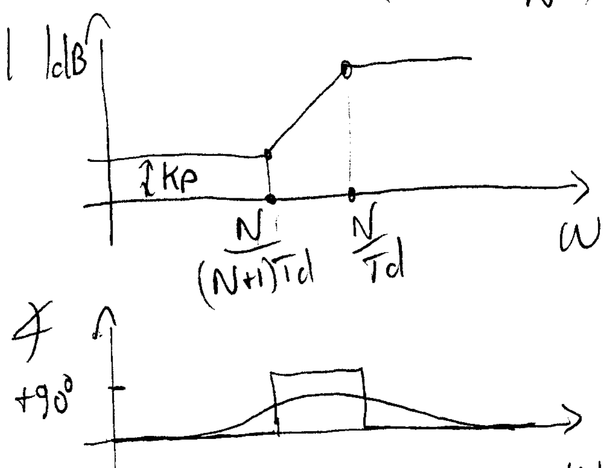
- CASI PARTICOLARI

• P $\quad R(s) = K_p$

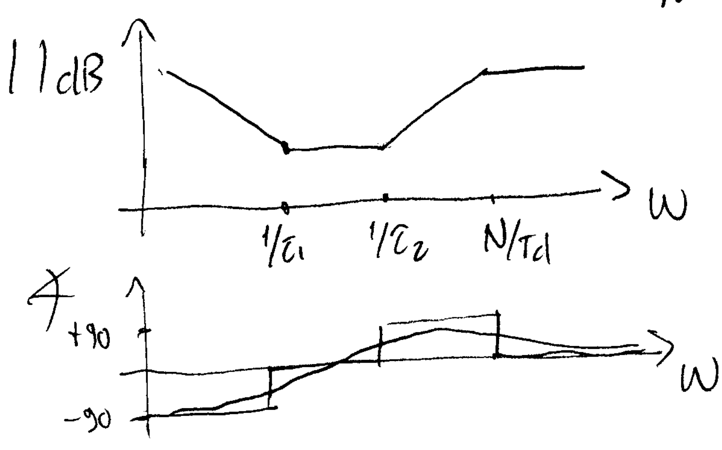
• PI $\quad R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right) = K_p \frac{1+sT_i}{sT_i}$ $\quad$ 1 zero, 1 polo origine (integratore)



• PD (reale) $\quad R(s) = K_p \left(1 + \frac{sT_d}{1+s\frac{T_d}{N}}\right) = K_p \frac{1+sT_d\frac{N+1}{N}}{1+s\frac{T_d}{N}}$ $\quad$ 1 zero, 1 polo alta frequenza



• PID (reale) $\quad R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1+\frac{sT_d}{N}}\right) = K_p \frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}{sT_i(1+sT_d/N)}$ $\quad$ 2 zeri, 1 polo origine, 1 polo alta frequenza



REGOLATORI PID

– PROGETTO DEL REGOLATORE PID – GENERALITÀ

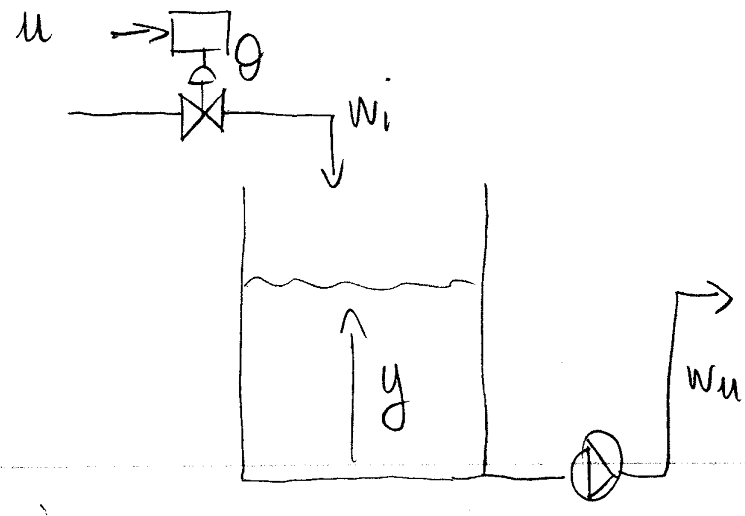
- Se è richiesto errore statico nullo si introduce la parte I, altrimenti si cerca di rendere piccolo l'errore statico alzando la costante K_p (che diminuisce il fattore $\frac{1}{1+\mu_L(s)}$)

- Se si è introdotta la parte I, si tara T_i in modo che lo zero porti ad avere un φ_m soddisfacente

- Regolatori senza parte D non possono introdurre anticipo di fase a nessuna frequenza: Se la banda richiesta è $\overline{\omega}_c$, e $\measuredangle G(j\overline{\omega}_c) < -180 + \varphi_m$, non riesco a rispettare la specifica. Introducendo la parte D si possono guadagnare fino a 90° di margine di fase, in modo da soddisfare la specifica (purchè $\measuredangle G(j\overline{\omega}_c) > -270 + \varphi_m$).
  Peraltro la parte D comporta $|R(j\omega)|$ alto ad $\omega \geq \omega_c$, e quindi $|Q(j\omega)|$ grande ad alta frequenza: se la misura è affetta da rumore (componenti significative ad alta frequenza), $u(t)$ tenderà a muoversi molto nervosamente
  → la parte D si usa con parsimonia, e si evita in tutti i casi in cui è possibile

CASI APPLICATIVI

- CONTROLLO DI LIVELLO IN UN SERBATOIO

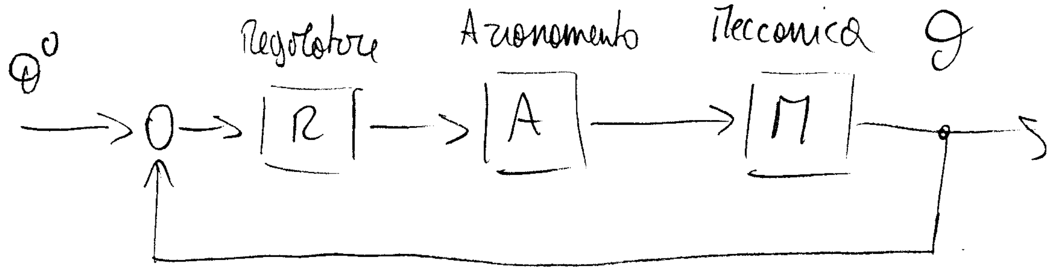


- Var di controllo: comando al servomeccanismo della valvola
- Disturbo: portata aspirata w_u
- Var. controllata: livello

- Analisi della dinamica del processo
  - equazione conservazione massa + trasf. di Laplace

$$Y(s) = \frac{1}{\rho A s} W_i(s) - \frac{1}{\rho A s} W_u(s)$$

  - dinamica dell'attuatore
    - Una valvola servocomandata è a sua volta un sistema controllato (servocomando)



- l'azionamento può essere pneumatico o elettrico

CASI APPLICATIVI

- In ogni caso, se il sistema lavora in modo lineare, possiamo descriverlo agli effetti esterni con un modello semplificato

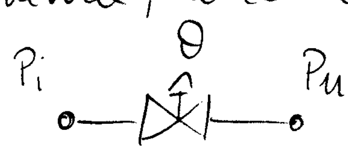
$$\frac{\Theta(s)}{\Theta^{\circ}(s)} = \frac{1}{1+\frac{1}{\omega_{ca}} s}$$

dove ω_{ca} è la banda del servocomando

NB questo modello è valido per $\omega < 2 \div 3\, \omega_c$, a frequenze più alte non descrive più la dinamica dell'attuatore in modo credibile

- Relazione $\theta \leftrightarrow w$

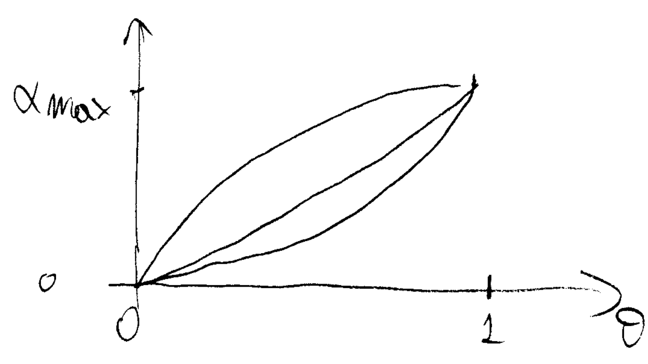
Il funzionamento della valvola può essere descritto dall'equazione



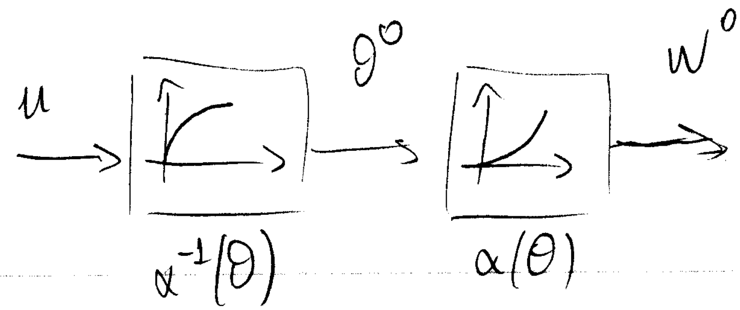
$$w = K_v(\theta) \sqrt{2\rho (P_i - P_u)}$$

se supponiamo $P_i = cost$, $P_o = cost$, si ha $\boxed{w = \alpha(\theta)}$

la forma di $K_v(\theta)$, e quindi di $\alpha(\theta)$, varia a seconda delle caratteristiche costruttive



- In generale si può ottenere una caratteristica lineare anteponendo un elemento nonlineare con andamento opportuno



- È quindi possibile ottenere una relazione lineare tra la var. di controllo u e la portata w_i

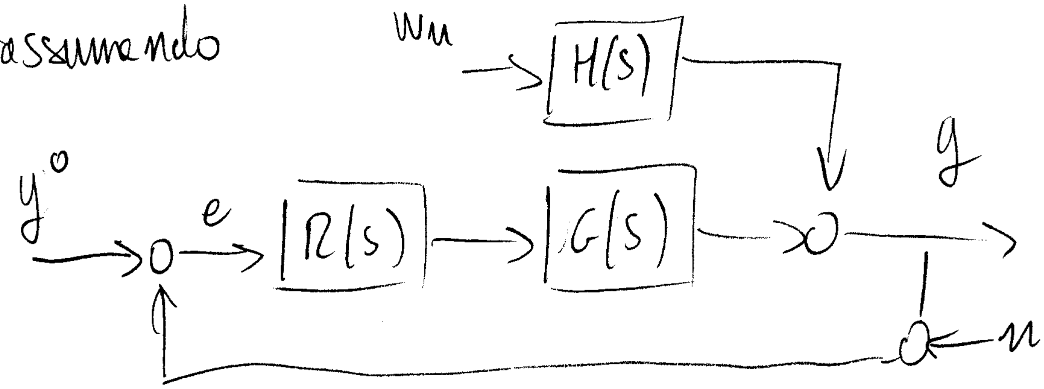
$$\frac{W_i(s)}{U(s)} = \frac{1}{1+sT_a}$$

- dinamica del sensore

I sensori di livello possono basarsi su svariate tecnologie (sensori di pressione piezoresistivi, sensori ad ultrasuoni, galleggianti, etc.). In generale comunque la dinamica è molto più rapida delle dinamiche desiderate del livello quindi si può assumere $T(s) = 1$

CASI APPLICATIVI

- Riassumendo



$$G(s) = \frac{1}{\rho A s} \cdot \frac{1}{1+sT_a} \qquad H(s) = -\frac{1}{\rho A s}$$

- supponiamo di dover far fronte a variazioni a scalino del disturbo w_u, o eventualmente del livello desiderato ℓ^o

$$y^o = A \cdot sca(t) \qquad w_u = B \cdot sca(t)$$

- PROGETTO REGOLATORE P

$$R(s) = K_p \qquad L(s) = \frac{K_p}{\rho A s\,(1+sT_a)}$$

- Prestazioni statiche

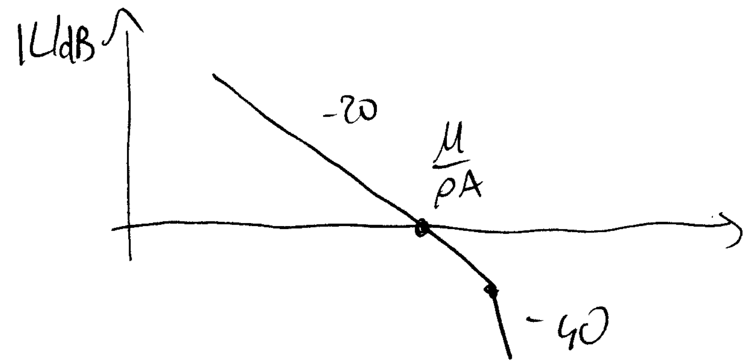
$$e_{\infty y^o} = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{A}{\cancel{s}} \cdot \frac{1}{1+L(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{A}{1+\frac{K_p}{\rho A s}} = 0 \qquad \text{OK}$$

$$e_{\infty w} = \lim_{s \to 0} s\,\frac{B}{s} \cdot \frac{H(s)}{1+L(s)} = \lim_{s \to 0} -\frac{B/\rho A s}{1+\frac{K_p}{\rho A s}} = \frac{B}{K_p}$$

Accettabile solo se B è piccolo e Kp è grande. Se il rumore di misura $n(t)$ è rilevante, non si può alzare troppo Kp se si vogliono evitare eccessive sollecitazioni della servovalvola

CASI APPLICATIVI

- Prestazioni dinamiche



$$\omega_c = \frac{K_P}{\rho A}$$

→ La banda e la velocità di risposta sono proporzionali al guadagno del P

$$\varphi_c = -90^\circ - \arctan(\omega_c T_a)$$

$$\varphi_m = 180 - |-90^\circ - \arctan(\omega_c T_a)| = 90^\circ - \arctan(\omega_c T_a)$$

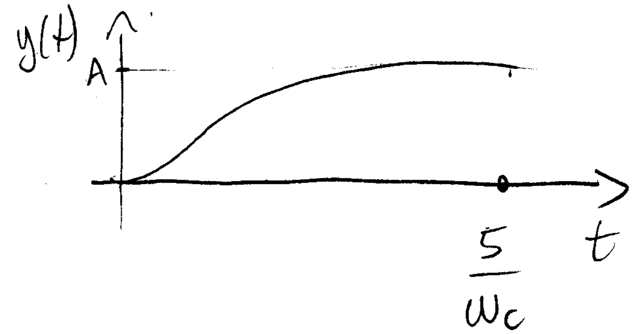
→ il margine di fase è accettabile ($\varphi_m > 45^\circ$) se $\omega_c < \frac{1}{T_a}$

cioè se la velocità di risposta del sistema ad anello chiuso è minore di quella dell'attuatore

NB Sotto questa ipotesi, l'influenza delle dinamiche ad alta frequenza trascurate nel modello dinamico dell'attuatore non sono determinanti

- Risposte a scalino ($hp \ \varphi_m > 60^\circ$)

$y^0 = A\,sca(t)$



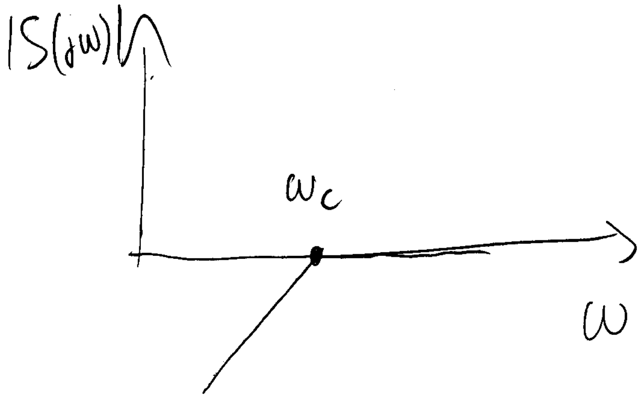
- Il livello si porta al valore desiderato in un tempo $\frac{5}{\omega_c}$

CASI APPLICATIVI

$$w_u = B\,\mathrm{sca}(t)$$

$$\frac{Y}{w_u} = \frac{H(s)}{1+L(s)} = H(s)\cdot S(s)$$

$$S(j\omega) \cong \begin{cases} \dfrac{1}{L(j\omega)} & \omega \ll \omega_c \\ 1 & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

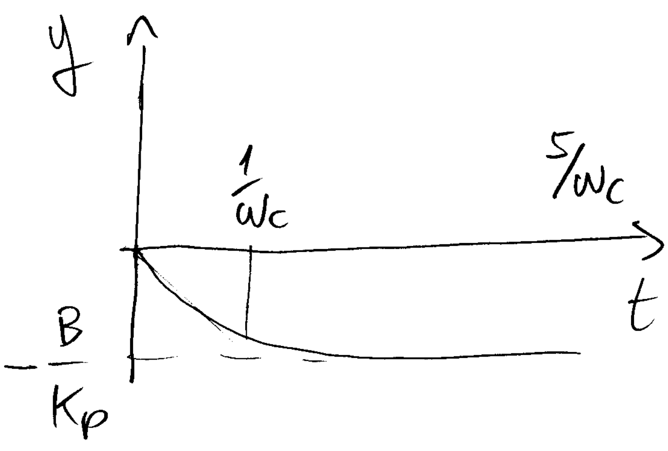


$$\rightarrow \quad S(s) \simeq \frac{s/\omega_c}{1+\frac{s}{\omega_c}}$$

$$\left(\lim_{s\to\infty} S(s) = 1\right)$$

$$\frac{Y}{w_u} = H(s)\cdot S(s) \simeq -\frac{1}{\cancel{\rho A} s}\cdot\frac{\frac{\cancel{\rho A}}{K_p}\cancel{s}}{1+\frac{s}{\omega_c}}$$

$$\simeq -\frac{1}{K_p}\,\frac{1}{1+s/\omega_c}$$



risposta a $w_u = B\,\mathrm{sca}(t)$

- PROGETTO REGOLATORE PI

- Se le variazioni di w_n sono molto ampie, e la presenza di rumore sconsiglia di alzare troppo K_p, l'errore statico potrebbe risultare inaccettabile

- Si rimedia aggiungendo azione integrale al regolatore

$$R(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right) = K_p \frac{1+sT_i}{sT_i}$$

$$L(s) = K_p \frac{1+sT_i}{\rho A s^2 (1+sT_a)}$$

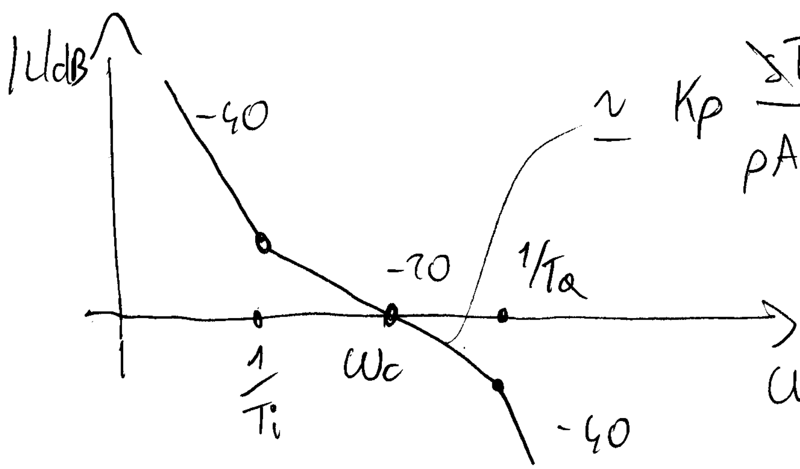
- Prestazioni statiche

$$e_{\infty y^0} = \lim_{s \to 0} \frac{A}{1+\frac{K_p}{\rho A s^2}} = 0 \quad \checkmark$$

$$e_{\infty w_n} = \lim_{s \to 0} -\frac{B/\rho A s}{1+\frac{K_p}{\rho A s^2}} = 0 \quad \checkmark \qquad \text{OK}$$

- <u>Prestazioni dinamiche</u>

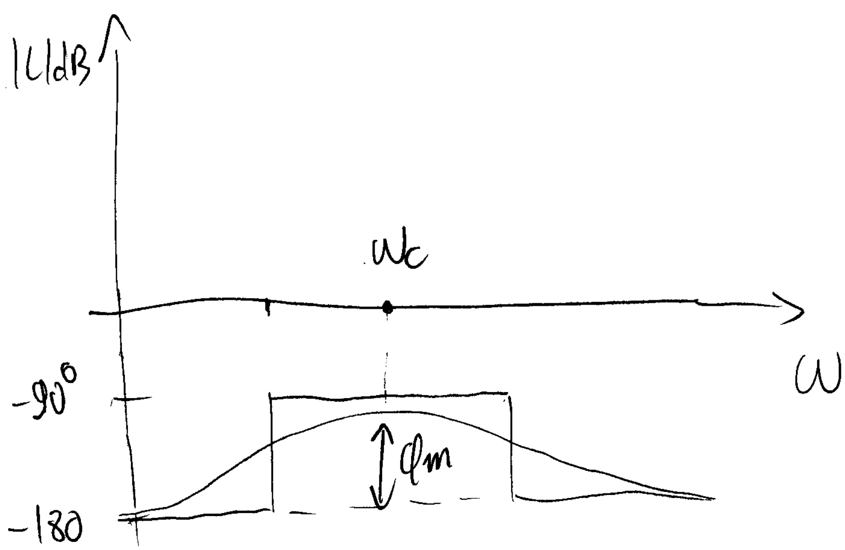
  - Il doppio integratore dà un contributo di $-180°$ a $L(j\omega)$; occorre quindi piazzare lo zero *prima* di ω_c, in modo che dia una forte azione di anticipo di fase



$$\simeq K_p \frac{\cancel{s}T_i}{\rho A s^{\cancel{2}} T_i} = \frac{K_p}{\rho A} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\omega_c \simeq \frac{K_p}{\rho A}$$

(più o meno come nel caso del P)



$$\varphi_c = -180° + \arctan(\omega_c T_i) - \arctan(\omega_c T_a)$$

$$\varphi_m = +\arctan(\omega_c T_i) - \arctan(\omega_c T_a)$$

CASI APPLICATIVI

- Esempio $T_a = 5\ s$ $\quad \omega_c = 0.1$ rad/s $\left(\Rightarrow \frac{5}{\omega_c} = 50 s\right)$

$$\varphi_m = 60^\circ$$

$$\varphi_m = \arctan(0.1 T_i) - \arctan(0.5) = 60^\circ$$

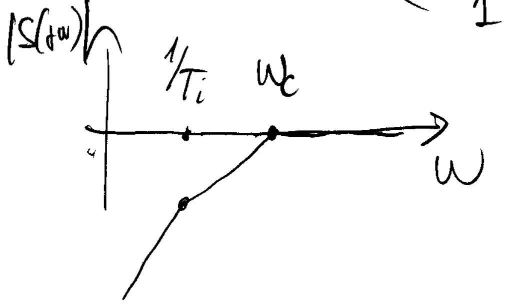
$$\arctan(0.1 T_i) = 60^\circ - 27^\circ = 37^\circ$$

$$T_i = \frac{1}{0.1} \tan 37^\circ = 7.5$$

$$K_p = \omega_c \frac{\rho A}{T_i} = \frac{0.1}{7.5} \cdot \rho A$$

- Risposta a $W_u = B\ sca(t)$

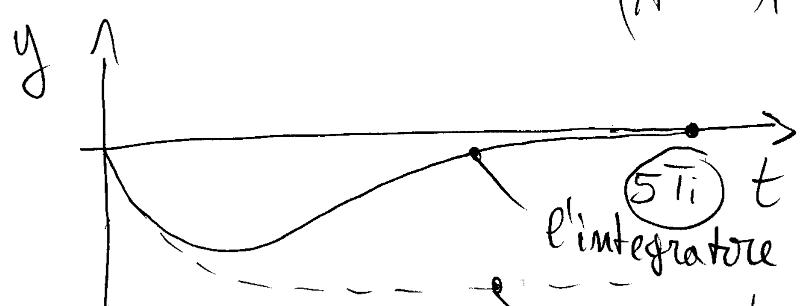
$$S(j\omega) \simeq \begin{cases} -\dfrac{1}{L(j\omega)} & \omega \ll \omega_c \\ 1 & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$



$$S(s) \simeq \frac{s^2 \frac{T_i}{\omega_c}}{(1+sT_i)\left(1+\frac{s}{\omega_c}\right)}$$

polo dominante !!

$$\frac{Y}{W_u} = H(s)S(s) \simeq -\frac{1}{\cancel{\rho A}\cancel{s}} \frac{\frac{\cancel{\rho A}}{K_p} s^{\cancel{2}} T_i}{(1+sT_i)\left(1+\frac{s}{\omega_c}\right)} \simeq -\frac{T_i}{K_p} \frac{s}{(1+sT_i)\left(1+\frac{s}{\omega_c}\right)}$$



l'integratore annulla l'errore statico

andamento col solo controllo P

- COMPENSAZIONE DIRETTA DEL DISTURBO

- Negli schemi di controllo P e PI (pura retroazione dell'errore) la reiezione del disturbo migliora all'aumentare del guadagno K_p, e quindi della banda del controllo

- Supponiamo di trovarci in una situazione caratterizzata da:
  1. disturbi di elevata ampiezza (→ grandi variazioni della portata utente w_u)
  2. livello di rumore del sensore elevato

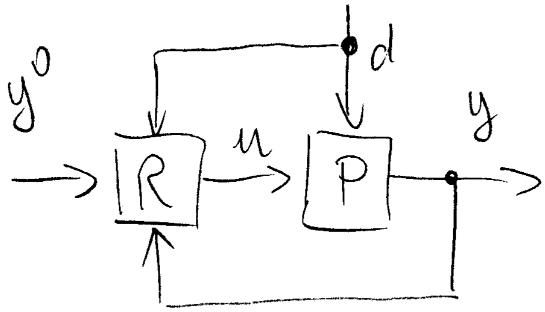
- L'aspetto 1) richiede una banda elevata per ottenere una soddisfacente reiezione del disturbo
- L'aspetto 2) sconsiglia invece di aumentare troppo la banda, per evitare eccessive sollecitazioni dell'attuatore dovute al rumore di misura

=> Potrebbe non esistere un compromesso accettabile

- In questi casi si può ricorrere alla compensazione diretta del disturbo, cioè ad una soluzione integrata anello aperto + anello chiuso

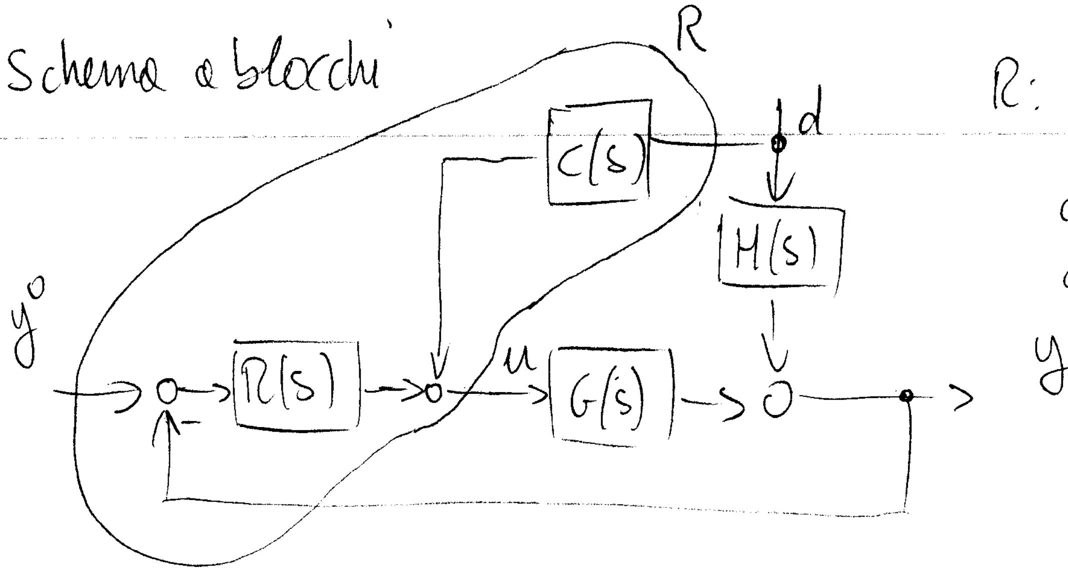
CASI APPLICATIVI

- Schema di principio



• Il regolatore ha accesso ad una misura del disturbo e lo impiega per stabilire l'andamento di $u(t)$

- Schema a blocchi



R: regolatore con compensazione del disturbo

- Criterio di progetto

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{H(s)+C(s)G(s)}{1+L(s)}$$

vogliamo $\frac{Y}{D} \sim 0 \Rightarrow H(s)+C(s)G(s)=0$

$$\boxed{C(s) = -\frac{H(s)}{G(s)}}$$

- Pro: migliori prestazioni di reiezione del disturbo
- Contro: occorre un sensore in più (costi, manutenzione...)

CASI APPLICATIVI

- Osservazioni

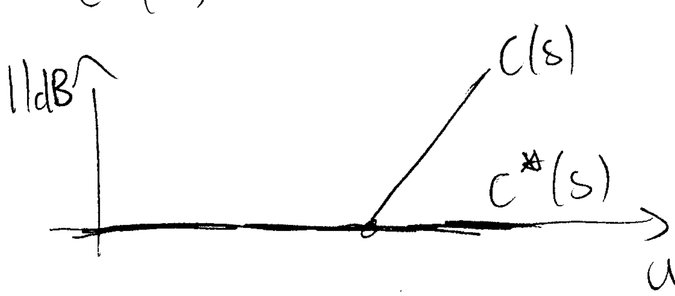
  - Se la compensazione non è perfetta, il termine $\frac{1}{1+L(s)}$ dovuto alla retroazione si occupa di ridurre l'errore residuo

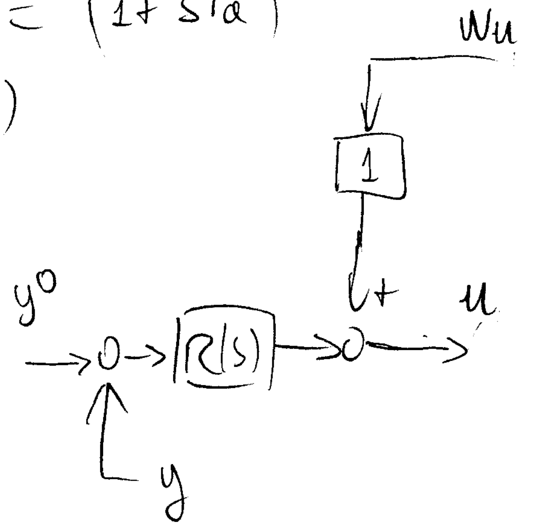
  - Può capitare che $C(s)$ abbia più zeri che poli, e che non sia realizzabile fisicamente. In questo caso si introduce una fdt $C^*(s)$ che approssimi $C(s)$ in bassa frequenza

- Esempio: controllo di livello

$$C(s) = -\frac{H(s)}{G(s)} = -\frac{-\frac{1}{\rho A s}}{\frac{1}{\rho A s(1+sT_a)}} = (1+sT_a)$$

$$C^*(s) = 1$$

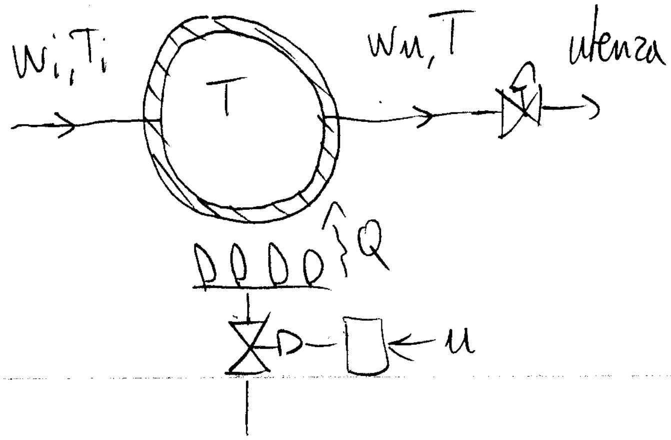




- Se la portata utente aumenta, il compensatore richiede subito una portata uguale alla valvola alimento, senza aspettare che il livello scenda
- La retroazione va comunque conservata per compensare gli effetti delle inevitabili imprecisioni di sensori e attuatori

CASI APPLICATIVI

- CONTROLLO DI TEMPERATURA IN UNA CALDAIA



- Var di controllo: comando alla valvola combustibile
- Disturbi: portata acqua calda richiesta e temperatura acqua alimento caldaia
- Var controllata: temperatura acqua in uscita

- Analisi della dinamica del processo

- Equazioni massa + energia $\rightarrow$ equazioni differenziali <u>non-lineari</u>

Supponendo di muoversi nell'intorno di un punto di lavoro, la dinamica può essere approssimata da

$$\Delta T(s) = \mu_Q \frac{1}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} \Delta Q(s) + \mu_W \frac{(1+s\tau_m)}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} \Delta W(s) + \frac{1+s\tau_m}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} \Delta T_i(s)$$

con $\mu_Q, \mu_W, \tau_1, \tau_2, \tau_m$ funzioni dei parametri del processo e <u>della portata di regime</u> $\bar{w}$

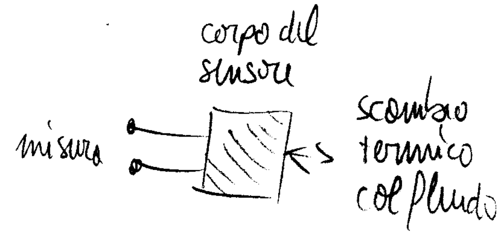
CASI APPLICATIVI

- Dinamica dell'attuatore

ipotizzando la completa combustione del gas, che tutto il calore prodotto dalla fiamma sia trasferito alla parete metallica, e che il servocomando della valvola abbia un funzionamento lineare e sia opportunamente tarato

$$\Delta Q(s) = \frac{1}{1+sT_a}\,\Delta u$$

- Dinamica del sensore



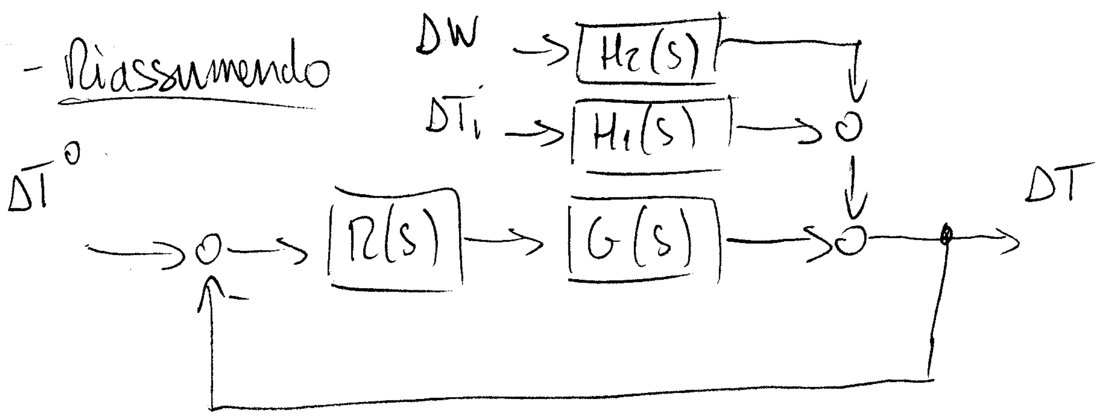
I sensori di temperatura hanno una struttura riassumibile come in figura. Ipotizzando che la temperatura del corpo del sensore sia uniforme (ipotesi valida fino ad una certa frequenza), la dinamica tra la temperatura del fluido e la misura è analoga a quella tra temperatura esterna e temperatura interna del termosifone

$$\Delta c(s) = \frac{1}{1+sT_t}\,\Delta T(s)$$

$$\left(\text{modello valido per } \omega < 2\div3\,\frac{1}{T_t}\right)$$

CASI APPLICATIVI

- Riassumendo



$$G(s) = \mu_Q \frac{1}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+sT_Q)(1+sT_F)}$$

$$H_1(s) = \frac{1+s\tau_m}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} \qquad H_2(s) = \mu_W \frac{1+s\tau_m}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$

- Supponiamo di dover far fronte a perturbazioni a scalino di ΔT^0, ΔT_i, ΔW di ampiezza A, B, C, rispettivamente

- PROGETTO REGOLATORE P

$$R(s) = K_P \qquad L(s) = \frac{K_P \mu_Q}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+sT_Q)(1+sT_P)}$$

- Prestazioni statiche

$$e_{\infty\, \Delta T^0} = \frac{A}{1+K_P\mu_Q} \qquad e_{\infty\, \Delta T_i} = \frac{B}{1+K_P\mu_Q}$$

$$e_{\infty\, \Delta W} = \frac{C\mu_W}{1+K_P\mu_Q}$$

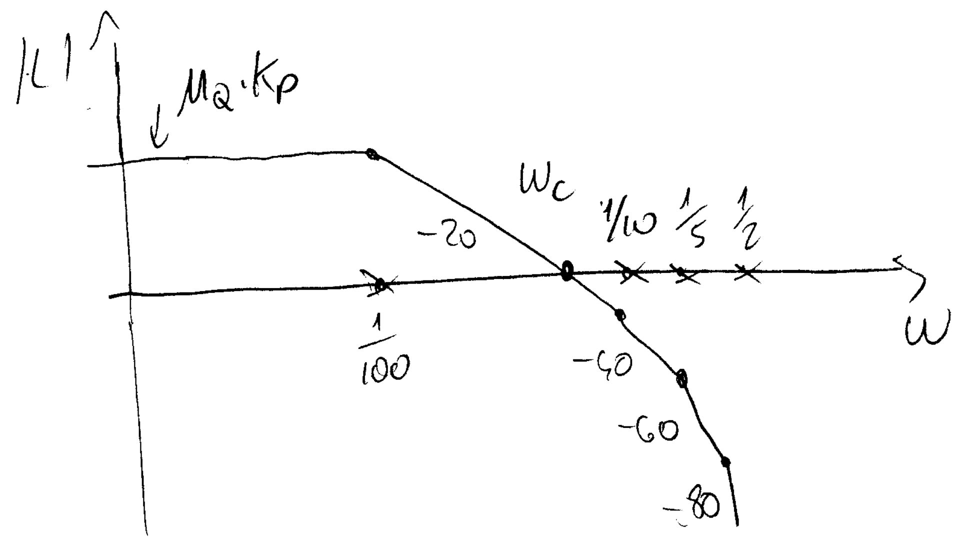
CASI APPLICATIVI

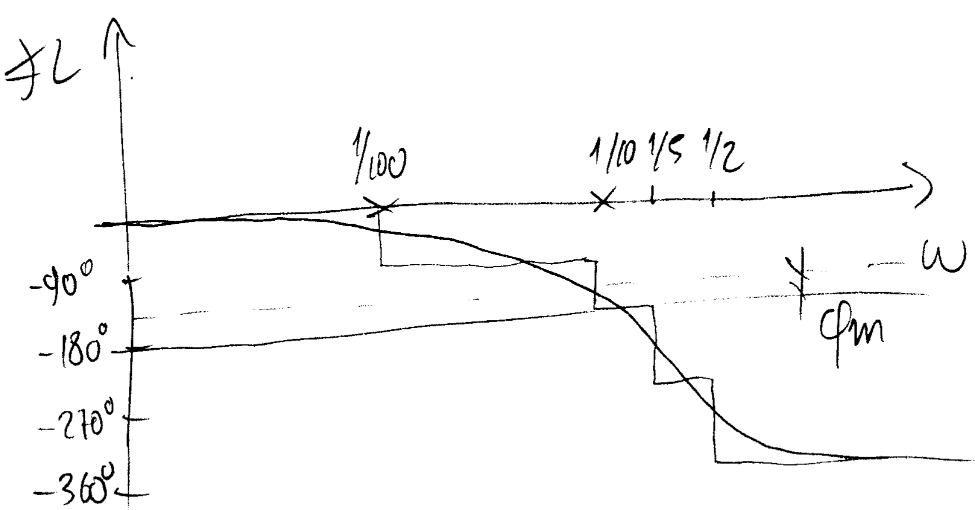
- Prestazioni dinamiche

Ipotizziamo le seguenti costanti di tempo

$\tau_1 = 100\,s \qquad \tau_2 = 10\,s \qquad T_a = 2\,s \qquad T_t = 5\,s$

Occorre che il diagramma di $|L(j\omega)|$ tagli l'asse 0dB con $-20\,dB/dec$ di pendenza





- Aumentando il guadagno K_p, la banda aumenta, ma il margine di fase cala rapidamente quando ci si avvicina a $\omega_c = 0.1\ rad/s$

- Se richiediamo $\varphi_m \geq 40^\circ$

$$\varphi_m = 180 - \arctan(100\,\omega_c) - \arctan(10\,\omega_c) - \arctan(2\omega_c) - \arctan(5\omega_c)$$

$$\varphi_m \geq 40^\circ \Rightarrow \omega_c \leq 0.065 \text{ rad/s}$$

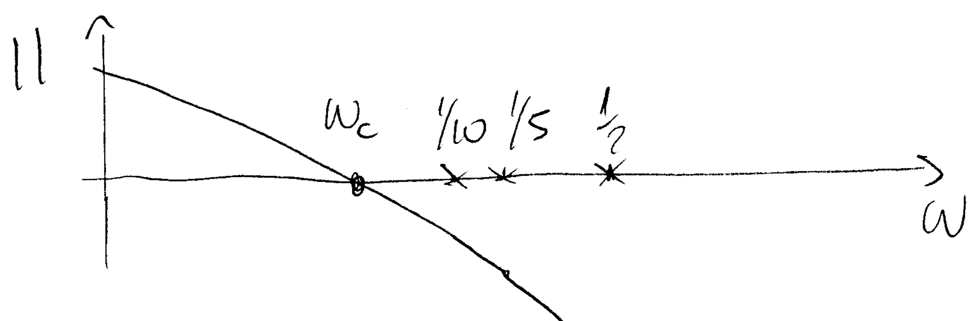
- Nell'intervallo $\omega \in [0.01 \vdash 0.1]$, il diagramma di Bode del modulo è $\sim \dfrac{K_p \mu_Q}{s\tau_1} \Rightarrow \omega_c = \dfrac{K_p \mu_Q}{\tau_1}$

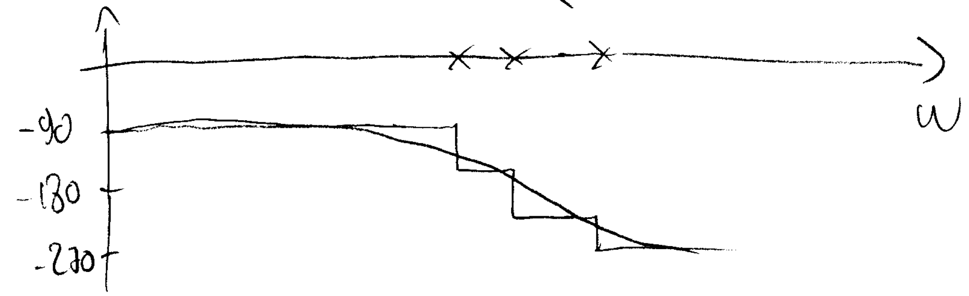
$$\Rightarrow K_p = \frac{\omega_c \tau_1}{\mu_Q}$$

- PROGETTO REGOLATORE PI

$$R(s) = K_p \frac{1+sT_i}{sT_i} \qquad L(s) = \frac{K_p \mu_Q (1+sT_i)}{sT_i(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_0)(1+sT_t)}$$

• Per allargare al massimo l'intervallo con pendenza $-20\frac{dB}{dec}$ si può scegliere $T_i = \tau_1$





- Prestazioni statiche

$$e_\infty = 0$$

- Prestazioni dinamiche

$$\omega_c = \frac{K_p \mu_a}{T_i}$$

$$\varphi_m = 180° - 90 - \arctan(10\omega_c) - \arctan(2\omega_c) - \arctan(5\omega_c)$$

$$\varphi_m \geq 40° \Rightarrow \quad \omega_c \leq 0.054 \text{ rad/s}$$

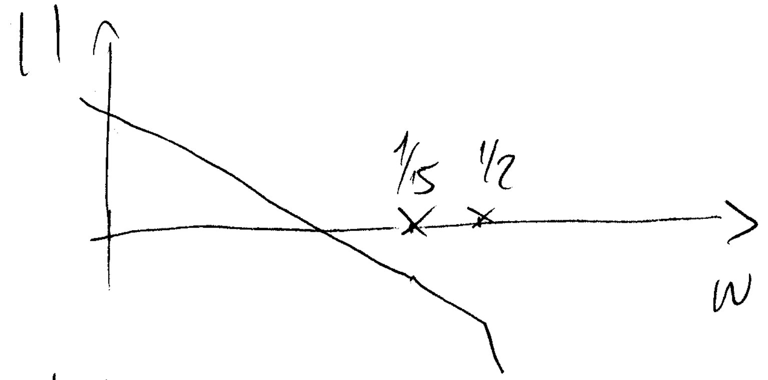
- PROGETTO REGOLATORE PID (reale)

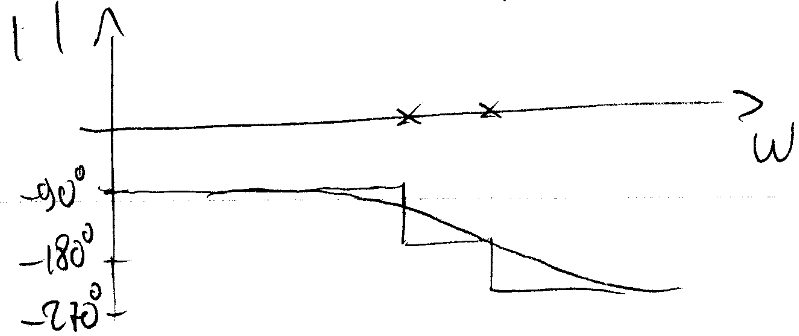
$$R(s) = K_p \frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}{sT_i\,(1+s^{T_d}/_N)}$$

- Possiamo allargare ulteriormente la zona con pendenza -20dB/dec utilizzando il secondo zero per cancellare il secondo polo di $G(s)$
- Piazziamo il polo ad alta frequenza, p.es, a $\frac{N}{T_d} = 5\omega_c$

$$\Rightarrow L(s) = K_p \mu_a \frac{1}{sT_i\,(1+sT_a)(1+sT_t)(1+s\frac{T_d}{N})}$$

CASI APPLICATIVI





- Prestazioni statiche

  risulta sempre $e_\infty = 0$

- Prestazioni dinamiche

$$\varphi_m = 180° - 90° - \arctan(5\omega_c) - \arctan(2\omega_c) - \arctan\left(\frac{\omega_c}{5\omega_c}\right)$$

$$\omega_c = \frac{K_p \mu_a}{T_i}$$

→ Se manteniamo la stessa banda del PI, il margine di fase passa da 40° a 57°

→ Si vogliamo $\varphi_m = 40°$, la banda passa a

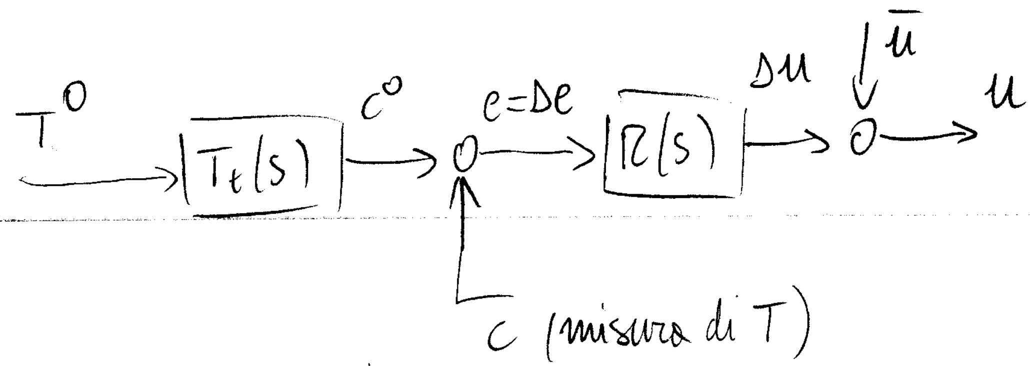
$\omega_c = 0.10$ rad/s

(quasi il doppio del PI)

CASI APPLICATIVI

- SCHEMA DI CONTROLLO EFFETTIVO

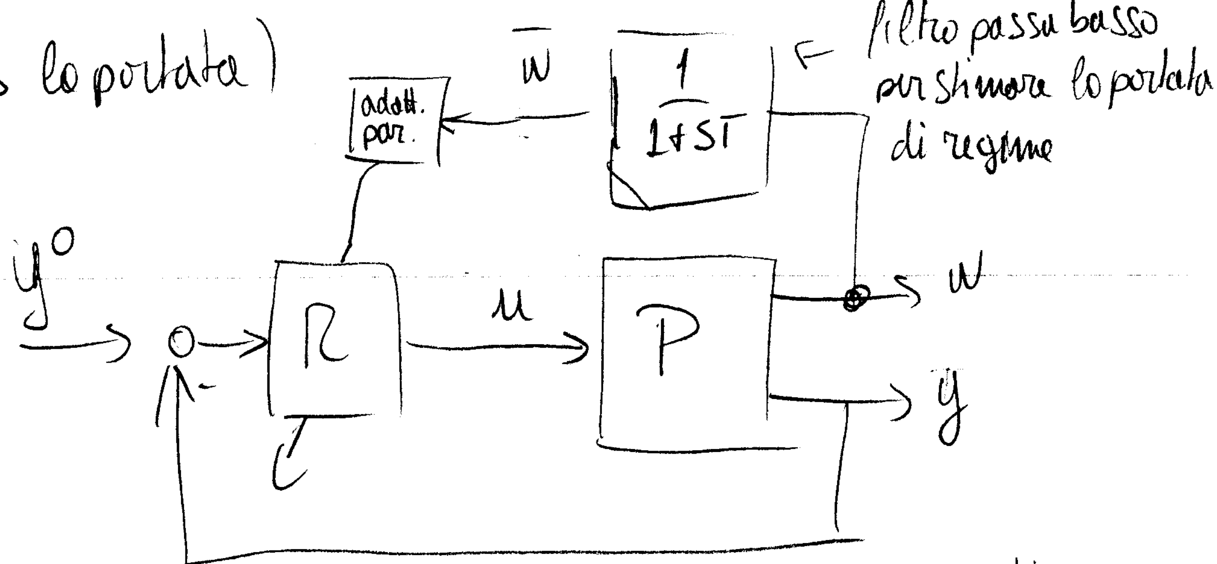
• Ricordando lo schema di controllo da cui è partita la derivazione di $R(s)$, si può ricavare l'effettivo schema della regolazione di temperatura



- CONTROLLO ADATTATIVO

- La funzione di trasferimento $P(s)$ dipende dal punto di lavoro del processo, in particolare dalla portata di regime $\bar{w}$
- Se $w(t)$ cambia pesantemente (x le richieste dell'utenza) occorre modificare i parametri di $R(s)$ in modo che siano adeguati alla nuova dinamica
- È possibile progettare il sistema di controllo in modo che si "ri-tari" opportunamente a seconda del punto di lavoro

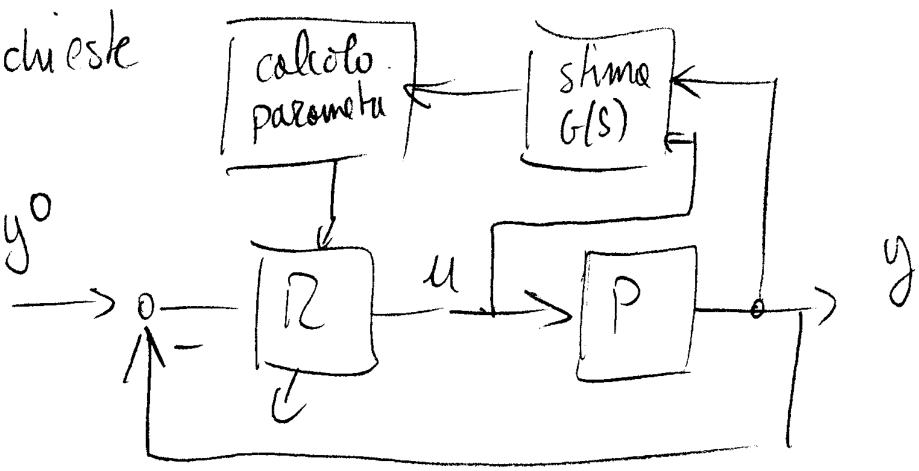
- *Gain scheduling*: la struttura di $G(s)$ è nota, e si sa come i parametri (μ, τ) dipendono dal punto di lavoro; quest'ultimo è stimabile misurando certe variabili (p.es la portata)



il regolatore adatta i suoi parametri in modo da garantire buone prestazioni in tutte le condizioni operative previste

- *Auto-tuning*

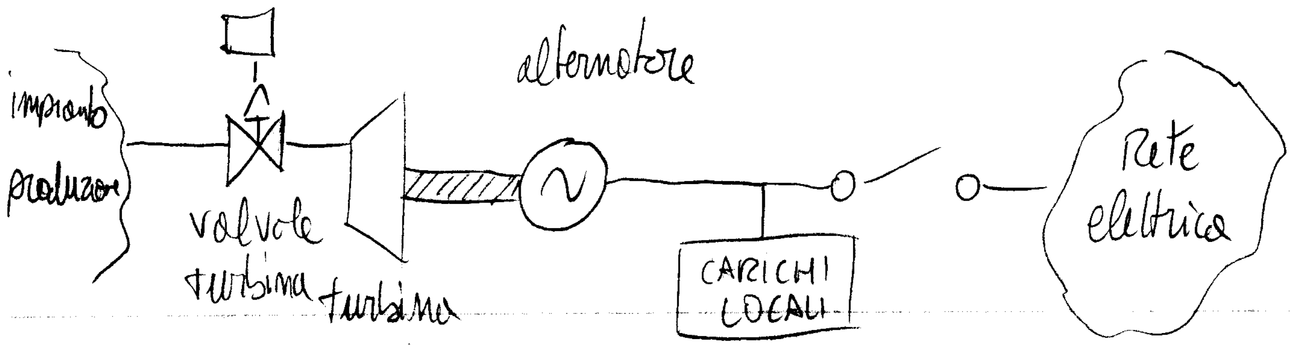
La FdT del processo viene stimata dal regolatore correlando l'andamento della variabile di controllo e dell'uscita misurata. In base alla $G(s)$ stimata, viene ricavata $R(s)$ che garantisca le prestazioni richieste



CASI APPLICATIVI

- CONTROLLO FREQUENZA / POTENZA NEI TURBOGENERATORI

- Schema base di un turbogeneratore



- Una turbina converte l'energia di un fluido in potenza meccanica scaricata sull'asse. Vari tipi di turbina: ad acqua (idroelettrico), a vapore e a gas (termoelettrico)
- Sullo stesso asse è calettato un generatore sincrono, che converte l'energia meccanica in energia elettrica, veicolata da correnti trifase sincrone con la frequenza di rotazione della macchina (50 Hz in Europa, 60 Hz negli USA)
- Il turbo alternatore può alimentare dei carichi locali, (funzionamento in isola), oppure essere connesso alla rete elettrica nazionale / continentale
- Gli obiettivi del controllo dipendono dallo stato della connessione

CASI APPLICATIVI

- In isola: fornire la potenza richiesta dai carichi locali, mantenendo costante la frequenza della tensione
- In rete: fornire una certa potenza ai carichi locali e alla rete, e partecipare alla regolazione di frequenza dell'intera rete

– DINAMICA DEL PROCESSO

- Produzione di potenza meccanica

Il sistema di controllo dell'impianto agisce sulle valvole di turbina (o sulle valvole di combustibile e su tutti gli organi di regolazione dell'impianto) in modo da generare una certa potenza meccanica

$$P_G^0 \longrightarrow \boxed{G_T(s)} \longrightarrow P_G$$

possiamo approssimare $\quad G_T(s) = \dfrac{1}{1+sT_G}$

- T_G può variare da meno di un secondo a un centinaio di secondi, a seconda del tipo di impianto (idroelettrico, turbogas, turbina a vapore) e della strategia di conduzione

- Produzione di potenza elettrica

L'alternatore preleva una certa potenza meccanica P_A dall'albero e la converte in energia elettrica con un rendimento η_e (tipicamente $\sim 95\%$). Le dinamiche elettriche sono piuttosto rapide rispetto alla dinamica delle potenze, quindi possiamo considerare il legame come algebrico

$$P_{el} = \eta_e P_A$$

- Bilancio di potenze sull'asse del turbogeneratore

L'albero del turbogeneratore, insieme con tutte le macchine ad esso calettate, è caratterizzato da un momento d'inerzia J, e quindi può immagazzinare energia cinetica aumentando la sua velocità di rotazione, che è sincrona con la frequenza delle correnti e tensioni trifase del generatore

f: frequenza di rete e di rotazione macchine (a meno del # di poli elettrici)

$\omega = 2\pi f$: pulsazione di rete e velocità angolare macchine

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}J\omega^2}_{\text{energia cinetica rotazionale}}\Big) = P_G - P_A \qquad \text{bilancio di potenze}$$

$$J\omega\dot{\omega} = P_G - P_A$$

Ipotesi semplificativa: P_A è indipendente da ω !!

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J\omega}(P_G - P_A) \qquad \text{equazione non lineare}$$

CASI APPLICATIVI

- Equilibrio $\quad \dot{\omega}=0 \Rightarrow \bar{P}_G=\bar{P}_A$
- linearizzazione $\quad \Delta\dot{\omega} = \dfrac{1}{J\bar{\omega}}\left(\Delta P_G - \Delta P_A\right) + \cancel{\dfrac{-\Delta\omega}{J\bar{\omega}^2}\left(\bar{P}_G - \bar{P}_A\right)}$
- Trasf. Laplace $\quad s\,\Delta\omega = \dfrac{1}{J\bar{\omega}}\left(\Delta P_G - \Delta P_A\right)$

$$\Delta\omega = \frac{1}{J\bar{\omega}s}\left(\Delta P_G - \Delta P_A\right) \qquad \left(\begin{aligned}\bar{\omega} &= 2\pi\bar{f} = \\ &= 2\pi\,50\,\text{Hz} = \\ &= 314\ \text{rad/s}\end{aligned}\right)$$

- La grandezza J è scomodo da usare; si preferisce esprimere il legame normalizzando le frequenze rispetto alla frequenza nominale ω_N e le potenze rispetto alla potenza nominale P_N del generatore

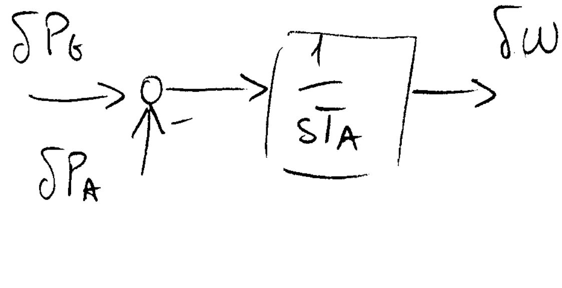
$$\underbrace{\frac{\Delta\omega}{\omega_N}}_{\text{adim.}} = \underbrace{\frac{P_N}{J\omega_N^2}}_{[t^{-1}]}\ \underbrace{\frac{1}{s}}_{[t]}\ \cdot \underbrace{\frac{\Delta P_G - \Delta P_A}{P_N}}_{\text{adim}} \Rightarrow \underbrace{T_A = \frac{J\omega_N^2}{P_N} = \frac{2E_c}{P_N}}_{\text{tempo di avviamento}}$$

tipicamente $T_A \sim 10\,s$ per taglie di impianto da 1 a 1000 MW

- Nel seguito per chiarezza utilizzeremo le variabili normalizzate

$$\delta P = \frac{\Delta P}{P_N} \qquad \delta\omega = \frac{\Delta\omega}{\omega_N} \qquad [p.u.]$$

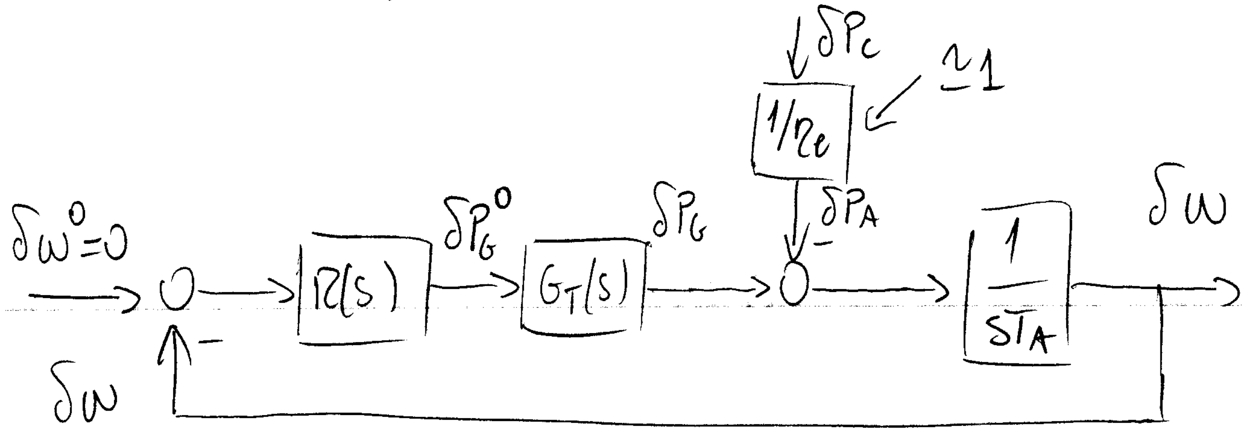
- Quindi



CASI APPLICATIVI

- GENERATORE IN ISOLA

  - Obiettivi: • mantenere $\omega \simeq \omega_N$
    • fornire tutta la potenza P_C richiesta dai carichi locali



• $\boxed{\text{Regolatore P}}$ $\quad R(s) = K_P = \frac{1}{\sigma} \qquad K_P = \frac{\delta P}{\delta\omega} \qquad \sigma = \frac{\delta\omega}{\delta P}$

(σ: statismo del regolatore)

- Prestazioni statiche quando $\delta P_C = \alpha \, sca(t)$

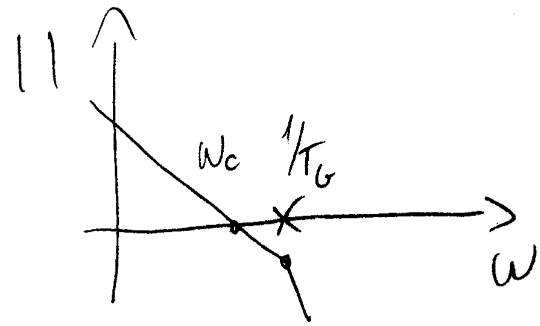
$$e_\infty = \lim_{s \to 0} \alpha \frac{1}{r_e} \frac{-\frac{1}{sT_A}}{1 + \frac{K_P}{sT_A}} = -\frac{\alpha}{r_e} \frac{1}{K_P} \simeq -\alpha \cdot \sigma$$

se $\sigma = 5\%$, aumentando il carico del 30% la frequenza a transitorio esaurito diminuisce di $\alpha \cdot \sigma = 1.5\%$

- comunque, a transitorio esaurito $\delta P_G = \delta P_A$, perché l'ingresso dell'integratore deve essere zero.

CASI APPLICATIVI

- Prestazioni dinamiche $\quad L(s) = K_p \, G_T(s) \, \dfrac{1}{sT_A} = \dfrac{1}{\sigma} \, \dfrac{1}{sT_A(1+sT_G)}$



$$\omega_c = \frac{1}{\sigma T_A}$$

$$\varphi_m = 90^\circ - \mathrm{arctg}\,(\omega_c T_G)$$

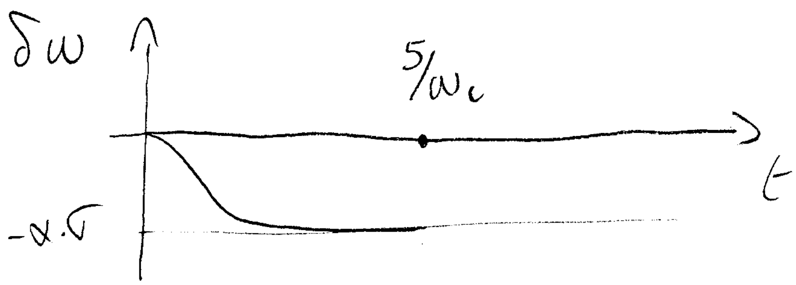
se vogliamo $\varphi_m \geq 60^\circ \qquad \omega_c \leq \dfrac{1}{T_G} \tan 30^\circ \leq \dfrac{0.57}{T_G}$

$$\frac{1}{\sigma T_A} \leq \frac{0.57}{T_G} \qquad \sigma \geq 1.7 \, \frac{T_G}{T_A}$$

→ per avere un basso statismo (quindi un basso errore a regime) occorre un sistema di controllo della potenza meccanica molto pronto: $\sigma = 5\% \Rightarrow T_G = 0.028\, T_A$ (oppure un generatore molto "pesante")

→ è opportuno introdurre un'azione integrale nel regolatore (→ PI)

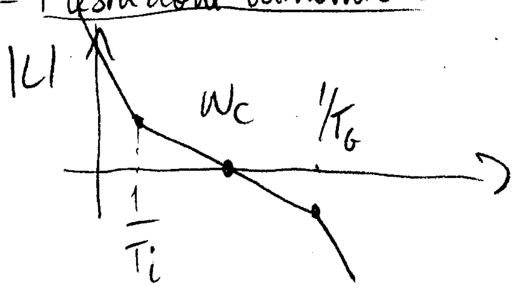
- Risposta a $\delta P_c = \alpha \, sca(t)$



Regolatore PI

$$R(s) = \frac{1}{\sigma}\,\frac{1+sT_i}{sT_i} \; ; \; L(s) = \frac{1}{\sigma} G_T(s)\,\frac{1}{sT_A}\,\frac{1+sT_i}{sT_i}$$

- Prestazioni dinamiche



$$\omega_c = \frac{1}{\sigma T_A}$$

$$\varphi_m = \arctan(\omega_c T_i) - \arctan(\omega_c T_G)$$

per avere un buon φ_m occorre tenere $T_i \gg \frac{1}{\omega_c}$ e $T_G \ll \frac{1}{\omega_c}$

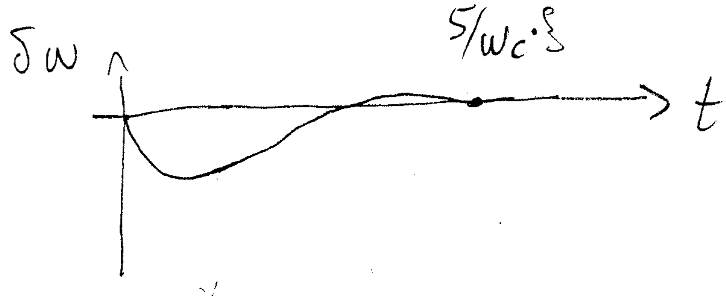
p.es $\omega_c = \frac{1}{2T_G}$; $T_i = 5/\omega_c$

$$\varphi_m = \arctan(4) - \arctan(0.5) = 52^0$$

- Prestazioni statiche $\quad \delta P_g = \alpha\, sca(t)$

$$e_\infty = \lim_{s \to 0} \alpha \, \frac{1/sT_A}{1 + \frac{1}{s^2 T_A T_i}} = 0$$

- Risposta a $\delta P_g = \alpha\, sca(t)$

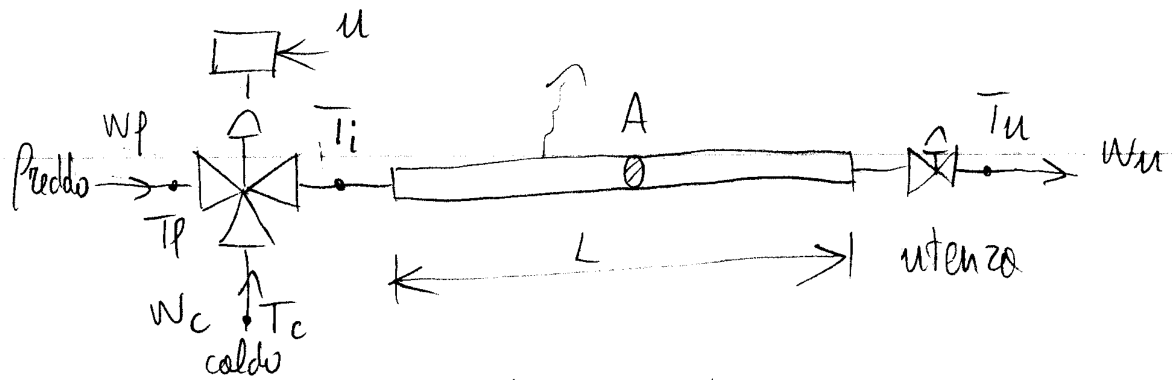


(un accenno di oscillazione visto che $\varphi_m < 60^0$)

- In generale si possono ottenere ω_c fino a 1 rad/s, purché gli organi di regolazione siano sufficientemente rapidi

- CONTROLLO TEMPERATURA IN UN SISTEMA DI DISTRIBUZIONE

- Si consideri il seguente sistema, composto da un miscelatore che alimenta una tubazione di distribuzione



- L'obiettivo del controllo è di regolare la temperatura d'uscita T_u, contrastando le variazioni di portata utenza, le variazioni di T_f e T_c, e le perdite di calore lungo la tubazione per l'imperfetto isolamento

- Tarando opportunamente il servocomando della servovalvola si può fare in modo che

$$\Delta T_i = \frac{1}{1+sT_m}\Delta u$$

- La dinamica è essenzialmente dovuta al servocomando, visto che gli accumuli di massa ed energia nella valvola a tre vie sono trascurabili

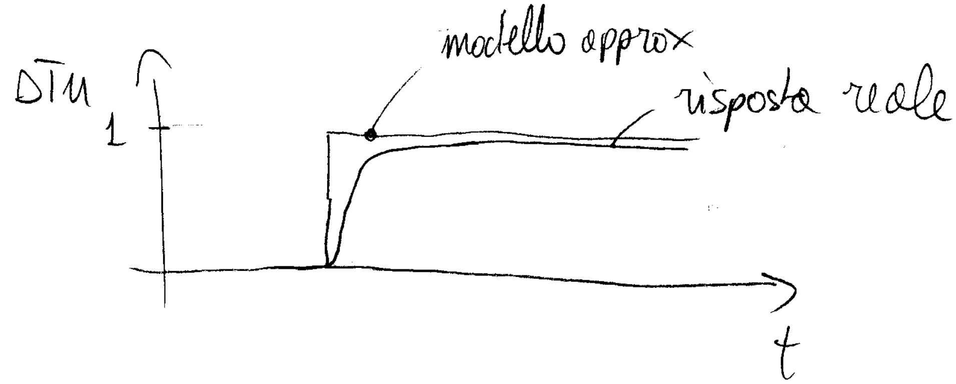
CASI APPLICATIVI

- Ipotizzando che la distribuzione di velocità radiale nella tubazione sia uniforme, e che lo scambio termico con le pareti del tubo sia trascurabile, tra le variazioni di temperatura all'ingresso e quelle all'uscita della tubazione c'è una dinamica di ritardo puro

$$\Delta T_u = e^{-s\tau} \Delta T_i \qquad \tau = \frac{\rho A L}{\bar{w}}$$

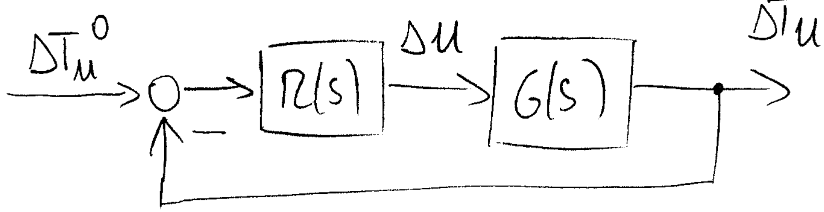
ρ: densità del fluido
A: sezione del tubo
$\bar{w}$: portata di regime

- Risposta a scalino $\quad \Delta T_i = sca(t)$



- SCHEMI DI REGOLAZIONE

- È possibile realizzare uno schema classico di regolazione in retroazione

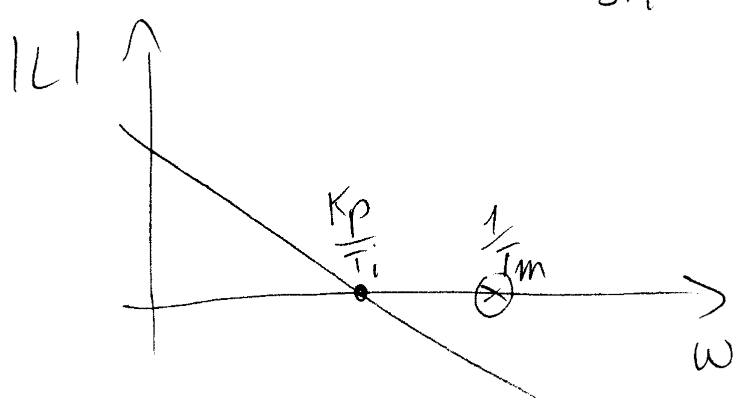


$$G(s)=\frac{1}{1+sT_m}\,e^{-\tau s}$$

- Supponiamo di impiegare un regolatore di tipo PI: l'azione integrale porta ad avere $e_\infty = 0$ a fronte di disturbi a scalino; possiamo impiegare lo zero per compensare il ritardo di fase del servomotore

$$R(s)=K_p\,\frac{1+sT_i}{sT_i} \qquad T_i=T_m$$

$$L(s)=\frac{K_p}{sT_i}\,e^{-s\tau}$$



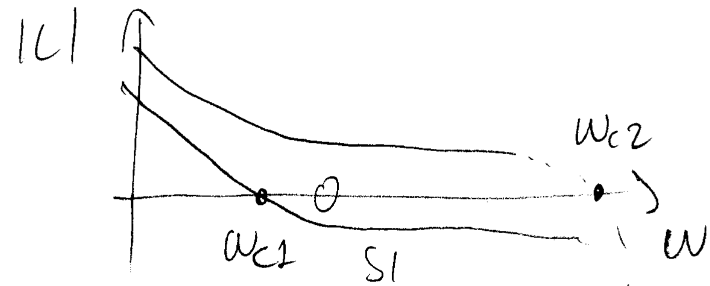
$$\omega_c=\frac{K_p}{T_i}$$

$$\varphi_c=-90^\circ-\omega_c\tau\,\frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\varphi_m=90^\circ-\omega_c\tau\,\frac{180^\circ}{\pi}$$

- Se vogliamo $\varphi_m \geq 60^0 \Rightarrow \omega_c \leq \frac{0.57}{\tau}$

- Potremmo guadagnare un po' di margine di fase introducendo uno zero in più nel regolatore (PID); di fatto però la sua costante di tempo deve essere $T < \frac{1}{\omega_c}$, altrimenti l'attraversamento dell'asse 0dB si sposta molto avanti, e il margine di fase crolla a causa del ritardo



$\rightarrow$ non si riesce ad allargare la banda oltre a $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

- Esempio $\rho = 1000 \frac{Kg}{m^3}$; $A = 10^{-3} m^3$; $L = 50 m$; $\bar{w} = 1 Kg/s$

$\tau = \frac{\rho A L}{w} = 50 s$; $\omega_{c\,max} = \frac{1}{40} = 0.025 \ rad/s \rightarrow T_{oss} = \frac{5}{\omega_c} = 200 s$

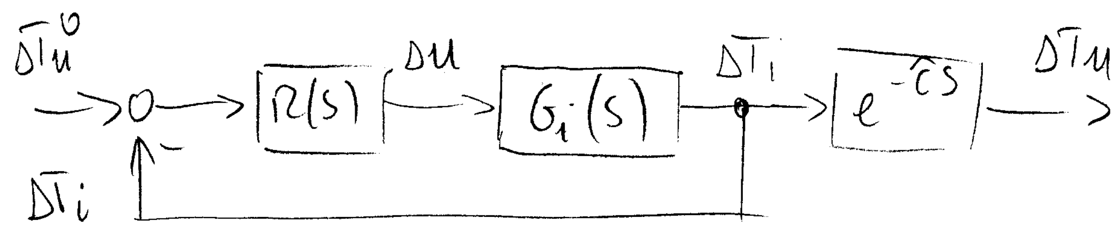
- Se vogliamo un sistema di controllo più rapido, occorre intervenire sulla dinamica del processo (cioè su $G(s)$)

CASI APPLICATIVI

- **Soluzione 1**: ridurre τ, per esempio riducendo la sezione del condotto, e quindi aumentando la velocità del fluido (ove accettabile)

$$A = 4\cdot 10^{-4}\, m^3 \Rightarrow \hat{\tau} = 20\,s \Rightarrow \omega_{c\,max} = 0.05\ \frac{rad}{s}$$

- **Soluzione 2**: migliorare la coibentazione del condotto, in modo da far sì che, dopo un ritardo di τ secondi, $\Delta T_u = \Delta T_i$. A questo punto è sufficiente regolare ΔT_i mediante retroazione



$$G_i(s) = \frac{1}{1+sT_m} \qquad R(s) = K_p\,\frac{1+sT_i}{sT_i} \qquad T_i = T_m$$

$$L(s) = \frac{K_p}{sT_i}$$ (nella misura in cui è valido il modello)

$\varphi_m = 90^\circ$ (")

L'unico limite alla banda è dato dalla velocità della servovalvola