Controlli Automatici

(Prof. Casella)

Prova in Itinere – 8 Maggio 2014

SOLUZIONI

Domanda 1

Con rifermento a sistemi lineari tempo-invarianti, dimostrare che la connessione in cascata preserva la stabilità dei singoli componenti, mentre la connessione in retroazione non la preserva. Commentare le conseguenze di questo fatto sul progetto di sistemi di controllo in anello aperto piuttosto che in anello chiuso.

La funzione di trasferimento di due blocchi $A(s) = N_A(s)/D_A(s)$ e $B(s) = N_B(s)/D_B(s)$ connessi in cascata vale $F(s) = N_A(s)N_B(s)/D_A(s)D_B(s)$. Se $A(s)$ e $B(s)$ sono asintoticamente stabili, le radici di $D_A(s)$ e $D_B(s)$ hanno parte reale negativa, e quindi anche i poli di $F(s)$ avranno parte reale negativa. Pertanto il sistema connesso in cascata sarà anch'esso asintoticamente stabile.

Nel caso della connessione in retroazione, $F(s) = N_A(s)D_B(s) / (N_A(s)N_B(s)+D_A(s)D_B(s))$. Sapendo che le radici di $D_A(s)$ e $D_B(s)$ hanno parte reale negativa, nulla si può dire in generale sulla posizione dei poli del polinomio caratteristico $N_A(s)N_B(s)+D_A(s)D_B(s)$, e quindi sulla stabilità del sistema retroazionato.

I sistemi di controllo in anello aperto richiedono solo connessioni in cascata tra il regolatore e il processo da controllare: se entrambi sono individualmente stabili, non si pongono problemi alla stabilità del sistema. Viceversa, la connessione in retroazione dei sistemi in anello chiuso può portare a problemi di stabilità anche nel caso che il processo e il regolatore siano individualmente stabili. D'altra parte, è possibile utilizzare regolatori in retroazione per stabilizzare sistemi instabili in anello aperto.

Domanda 2

Definire con precisione la funzione di trasferimento di un sistema dinamico lineare descritto dalle sue quattro matrici di sistema A, B, C, D.

La funzione di trasferimento $G(s)$ è una matrice di funzioni razionali tali per cui, detta $U(s)$ la trasformata di Laplace del vettore degli ingressi del sistema, la trasformata di Laplace del vettore delle uscite $Y(s) = G(s)\ U(s)$.

Si dimostra che tale funzione vale $G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$

Domanda 3

Si consideri un motore elettrico in corrente continua che movimenta un carico avente momento d'inerzia J e soggetto ad una coppia resistente τ_r proporzionale alla velocità angolare ω. La coppia motrice τ_m è proporzionale alla corrente i circolante nel motore, che è determinata dal bilancio tra la forza contro-elettromotrice e, proporzionale alla velocità angolare del motore ω, la caduta di tensione sulla resistenza degli avvolgimenti Ri e la tensione applicata al motore V. Il sistema è descritto dalle seguenti equazioni

$$V = e + Ri$$
$$e = K\omega$$
$$J\dot{\omega} = \tau_m - \tau_r$$
$$\tau_m = Ki$$
$$\tau_r = h\omega$$

3.1. Scrivere le equazioni di stato e di uscita del sistema, considerando V come variabile d'ingresso, ω ed i come variabili d'uscita.

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J}\left(K\frac{V - K\omega}{R} - h\omega\right)$$
$$y_1 = \omega$$
$$y_2 = i = \frac{V - K\omega}{R}$$

3.2. Calcolare le funzioni di trasferimento tra l'ingresso V e le uscite ω ed i, ponendole in forma guadagno/costanti di tempo.

$$\omega = \mu_1\frac{1}{1+sT}$$
$$i = \mu_2\frac{1+s\tau}{1+sT}$$
$$\mu_1 = \frac{K}{K^2 + Rh}$$
$$\mu_2 = \frac{h}{K^2 + Rh}$$
$$T = \frac{JR}{K^2 + Rh}$$
$$\tau = \frac{J}{h} = \frac{K^2 + Rh}{Rh}T$$

3.3. Tracciare i grafici qualitativi delle risposte a scalino unitario corrispondenti. Commentare l'andamento del transitorio di corrente quando $R << K^2/h$.

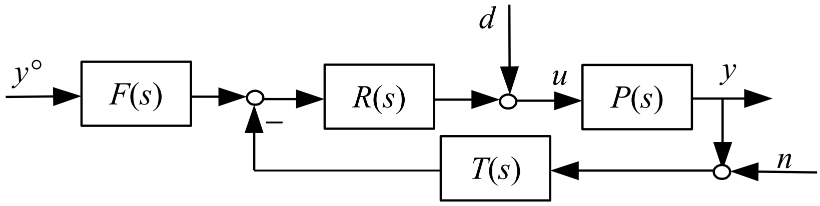
Le risposte a scalino sono le classiche risposte di sistemi del primo ordine con un polo reale e con un polo reale e uno zero reale. Si noti che $\tau / T = (K^2 + Rh) / Rh > 1$, quindi la risposta della corrente ha un valore iniziale sempre superiore al valore asintotico a transitorio esaurito.

Tale sovraelongazione risulta tanto più marcata quanto più $R << K^2/h$, perché in tal caso risulta in proporzione $\tau / T >> 1$

3.4. Si assuma ora che la tensione V sia a sua volta fornita da un generatore di tensione comandato da un segnale $V°$, con funzione di trasferimento $V = 1/(1+sT)\ V°$. Tracciare i grafici qualitativi delle risposte di ω ed i ad uno scalino unitario su $V°$, nell'ipotesi che la costante di tempo T sia molto minore della costante di tempo del motore trovata al punto 3.2.

In questo caso le risposte a scalino sono quelle di un sistema del secondo ordine con due poli reali e distinti, senza zeri nel caso di ω e con uno zero reale nel caso di i. Entrambe le risposte si assestano al valore asintotico (pari al guadagno della f.d.t.) dopo circa 5T unità di tempo. La risposta di ω ha valore iniziale e valore iniziale della derivata nulli, e non presenta sovraelongazioni. Per quanto riguarda la risposta di i, si osservi che, per le ipotesi fatte, lo zero ha costante di tempo superiore a quella dei due poli; pertanto la risposta presenta una sovraelongazione.

Domanda 4



$$R(s) = K\frac{1+2s}{2s}$$

$$P(s) = \frac{5}{1+2s}$$

$$T(s) = \frac{1}{1+s}$$

$$F(s) = \frac{1}{1+s}$$

4.1 Calcolare le funzioni di trasferimento di trasferimento tra gli ingressi *y°, d, n* e le uscite *u* ed *y*

$$U(s) = \frac{F(s)R(s)}{1+R(s)P(s)T(s)}Y°(s) + \frac{1}{1+R(s)P(s)T(s)}D(s) - \frac{R(s)T(s)}{1+R(s)P(s)T(s)}N(s)$$

$$U(s) = K\frac{1+2s}{2s^2+2s+5K}Y°(s) + \frac{2s(1+s)}{2s^2+2s+5K}D(s) - K\frac{1+2s}{2s^2+2s+5K}N(s)$$

$$Y(s) = \frac{F(s)R(s)P(s)}{1+R(s)P(s)T(s)}Y°(s) + \frac{P(s)}{1+R(s)P(s)T(s)}D(s) - \frac{R(s)P(s)T(s)}{1+R(s)P(s)T(s)}N(s)$$

$$U(s) = \frac{5K}{2s^2+2s+5K}Y°(s) + \frac{10s(1+s)}{(1+2s)(2s^2+2s+5K)}D(s) - \frac{5K}{2s^2+2s+5K}N(s)$$

4.2 Valutare per quali valori del parametro reale *K* le funzioni di trasferimento trovate sono asintoticamente stabili e prive di oscillazioni nella risposta a scalino.

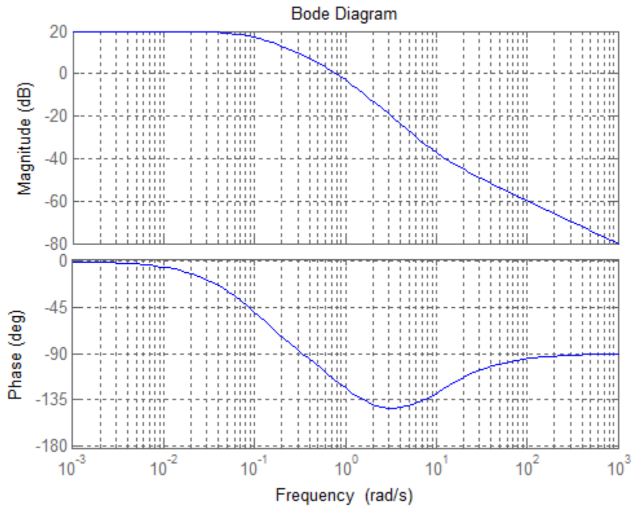
Per soddisfare il requisito è necessario che i poli delle funzioni di trasferimento siano reali e negativi. Occorre quindi che $4 - 40K > 0$ e che $K > 0$. Pertanto $0 < K < 0.1$.

Domanda 5

Si consideri il sistema lineare rappresentato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = 10 \frac{1 + \tau\, s}{(1 + 10s)(1 + s)}$$

5.1 Tracciare i diagrammi di Bode della risposta in frequenza del sistema per $\tau = 0.1$.



5.2 Dire per quali valori del parametro τ la fase della risposta in frequenza non scende mai sotto i $-90°$, motivando la risposta.

Si possono senz'altro escludere i valori di τ negativi, che porterebbero la fase ad un valore asintotico di -270° in alta frequenza. Per quanto riguarda i valori di τ positivi, ragionando sul diagramma asintotico della fase è immediato convincersi che per ottenere quanto richiesto la pulsazione dello zero deve trovarsi prima di quella del secondo polo, ovvero deve essere $\tau > 1$.