Controlli e Regolazione Automatica – Prova scritta del 18 maggio 2007

Soluzioni

Domanda 1

Si consideri un ipotetico sistema di regolazione della temperatura ambiente in un edificio. Una soluzione economica prevede di impostare la potenza termica generata (calda o fredda, a seconda della stagione) in funzione di una sola misura della temperatura esterna; una soluzione più costosa prevede di utilizzare anche misure di temperatura nei locali. Con riferimento alle strategie di controllo in *anello aperto* e in *anello chiuso*, discutere meriti e limiti delle due soluzioni.

La prima soluzione realizza una strategia di controllo in anello aperto: la variabile di controllo (potenza termica generata) viene modulata esclusivamente in funzione dell'andamento del disturbo principale (la temperatura esterna). Il vantaggio principale di questa soluzione è il basso costo della strumentazione (non occorrono sonde di temperatura nei locali). La precisione del controllo dipenderà fortemente dall'accuratezza con cui viene tarata la curva temperatura esterna/potenza termica, e sarà scadente nel caso in cui la temperatura dei locali dipenda fortemente da altri fenomeni oltre allo scambio convettivo con l'esterno (p.es. irraggiamento solare, dissipazione di calore da parte di macchinari, infiltrazioni d'aria dall'esterno, calore dissipato dagli occupanti, etc.).

La seconda soluzione realizza invece una strategia in anello chiuso. A fronte del costo di installazione e manutenzione delle sonde termiche nei locali, e di un maggiore numero di attuatori modulanti (idealmente uno per locale), grazie alla retroazione sarà possibile ottenere prestazioni migliori in termini di precisione della regolazione di temperatura, anche in presenza di disturbi addizionali quali quelli elencati in precedenza. Le regolazioni in retroazione andranno tarate in maniera opportuna in modo da evitare l'innesco di oscillazioni, o addirittura di instabilità, nel sistema di controllo.

Domanda 2

Si consideri una radiatore elettrico ad alta temperatura, costituito da una massa metallica attraversata da una corrente elettrica che lo riscalda. Ipotizzando una distribuzione uniforme della temperatura, assumendo che lo scambio termico convettivo sia trascurabile rispetto allo scambio radiativo, e che il radiatore si comporti come un corpo nero, si può formulare il seguente modello dinamico del sistema:

$$\begin{aligned} Mc\dot{T} &= Q - Q_{irr} \\ Q_{irr} &= \sigma\, S\,(T^4 - T_e^4) \end{aligned} ,$$

dove M è la massa del radiatore, c il suo calore specifico, Q il calore dissipato dalla corrente per effetto Joule, Q_{irr} il calore irradiato, σ la costante di Stefan-Boltzmann, S la superficie del radiatore, T la sua temperatura e T_e la temperatura dell'ambiente circostante.

Si chiede di:

1. Scrivere le equazioni di stato e di uscita del sistema, considerando come ingresso la potenza termica Q, e come uscite il calore irradiato e la temperatura del radiatore.

$$\dot{T}=\frac{Q-\sigma\ S(T^4-T_e^4)}{Mc}$$
$$y_1=T$$
$$y_2=Q_{irr}=\sigma\ S(T^4-T_e^4)$$

2. Calcolare le condizioni di equilibrio del sistema corrispondenti ad un generico valore di potenza dissipata e di temperatura ambiente.

Annullando le derivate, si trovano le seguenti relazioni tra i valori di equilibrio delle variabili del sistema:

$$\bar{Q}=\bar{Q}_{irr}$$
$$\bar{Q}_{irr}=\sigma\ S(\bar{T}^4-T_e^4)$$

che permettono di trovare il valore di equilibrio della temperatura, date la potenza dissipata e la temperatura ambiente:

$$\bar{T}=\sqrt[4]{T_e^4+\frac{\bar{Q}_{irr}}{\sigma\ S}}$$

3. Scrivere le equazioni del sistema linearizzate attorno a tale condizione di equilibrio.

$$\Delta\ \dot{T}=\frac{-4\sigma\ S\bar{T}^3}{Mc}\Delta T+\frac{1}{Mc}\Delta\ Q$$
$$\Delta\ y_1=\Delta\ T$$
$$\Delta\ y_2=4\sigma\ S\bar{T}^3\ \Delta\ T$$

4. Calcolare le funzioni di trasferimento tra le variazioni dell'ingresso e quelle delle uscite, evidenziandone guadagno e costanti di tempo.

Trasformando secondo Laplace le equazioni linearizzate, e risolvendole rispetto alle uscite, si trova

$$\Delta\ T=\frac{1}{Mc}\frac{1}{s+\frac{4\sigma\ S\bar{T}^3}{Mc}}\Delta\ Q$$
$$\Delta\ Q_{irr}=\frac{4\sigma\ S\bar{T}^3}{Mc}\frac{1}{s+\frac{4\sigma\ S\bar{T}^3}{Mc}}\Delta\ Q$$

Posto

$$\tau=\frac{Mc}{4\sigma\ S\bar{T}^3}$$
$$\mu=\frac{1}{4\sigma\ S\bar{T}^3}$$

si possono esprimere le funzioni di trasferimento in forma guadagno/costanti di tempo come:

$$\Delta\ T = \frac{\mu}{1 + s\tau} \Delta\ Q$$
$$\Delta\ Q_{irr} = \frac{1}{1 + s\tau} \Delta\ Q$$

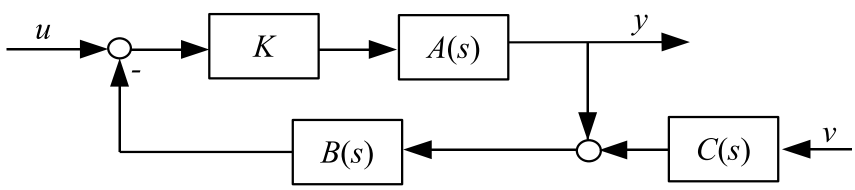
5. Tracciare i grafici qualitativi della risposte a scalino delle f.d.t. trovate, discutendo come essi cambino al crescere del valore di regime della potenza dissipata

Entrambe le risposte a scalino hanno il classico andamento esponenziale dei sistemi passa-basso del primo ordine. Aumentando il valore di regime della potenza dissipata, aumenta di conseguenza quello della potenza irraggiata, e quindi aumenta anche il valore di regime della temperatura (vedi relazioni di equilibrio). Di conseguenza la costante di tempo τ diminuisce, rendendo entrambi i transitori più rapidi. L'ampiezza del transitorio di temperatura (pari a μ) diminuisce, mentre l'ampiezza del transitorio di potenza irradiata resta costante.

Domanda 3

Calcolare le f.d.t tra gli ingressi *u*, *v* e l'uscita *y* del seguente schema a blocchi:

$$A(s) = \frac{0.2}{s}$$
$$B(s) = \frac{5}{1+s}$$
$$C(s) = \frac{10}{1+10\mathrm{s}}$$



Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, si trova facilmente che

$$Y(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)V(s)$$
$$G_1(s) = \frac{KA(s)}{1 + KA(s)B(s)} = \frac{0.2K(1+s)}{s^2 + s + K}$$
$$G_1(s) = -\frac{KA(s)B(s)C(s)}{1 + KA(s)B(s)} = \frac{10K}{(1+10\mathrm{s})(s^2 + s + K)}$$

Per $K = 1$, porre tali funzioni di trasferimento in forma guadagno/costanti di tempo.

Il polinomio di secondo grado a denominatore delle due funzioni di trasferimento

$$s^2 + s + 1$$

ha radici complesse coniugate; pertanto va rappresentato nella forma

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n^2} \quad ;$$

uguagliando i coefficienti dei polinomi si trova immediatamente

$$\omega_n = 1$$
$$\xi = 0.5 \quad .$$

Pertanto

$$G_1(s) = \frac{0.2(1+s)}{1+\frac{2\xi}{\omega_n}+\frac{1}{\omega_n^2}}$$
$$G_1(s) = \frac{1}{(1+10\mathrm{s})(1+\frac{2\xi}{\omega_n}+\frac{1}{\omega_n^2})}$$

Trovare quindi i valori del parametro *K* tali per cui il sistema sia asintoticamente stabile ed abbia risposte a scalino prive di oscillazioni.

Le funzioni di trasferimento del sistema sono caratterizzate da un polo negativo, pari a -0.1, e da due poli che sono le radici del polinomio

$$s^2 + s + K$$

La condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità richiede che sia K > 0

L'assenza di oscillazioni richiede che tutti i poli siano reali; pertanto il discriminante del polinomio deve essere non negativo.

$$\Delta = 1 - 4\mathrm{K} \geq 0$$

L'insieme dei valori K cercato è quindi l'intervallo

$$0 < K \leq 1/4 \quad .$$