

Controlli Automatici

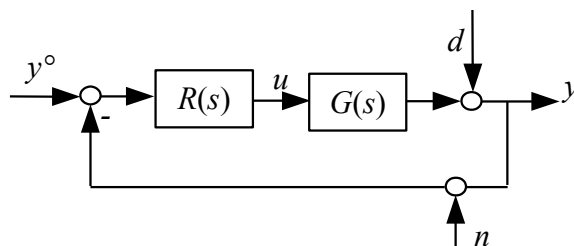
(Prof. Casella)

II Prova in Itinere – 21 Giugno 2013

SOLUZIONE

Domanda 1

Si consideri il sistema di controllo schematizzato in figura. Definire la funzione di sensitività del controllo, illustrando quindi il suo ruolo nella valutazione delle prestazioni del sistema. Si spieghi infine come la si possa valutare in maniera approssimata conoscendo il margine di fase e la pulsazione critica del sistema.



La funzione sensitività del controllo è definita come $Q(s) = R(s)/(1+R(s)G(s))$. A meno del segno, è la funzione di trasferimento tra i tre ingressi y^o , d ed n del sistema e la variabile di controllo u . Esprime quindi il legame dinamico tra tutte le perturbazioni che possono agire sul sistema (variazioni del set point e/o dei disturbi) e le corrispondenti variazioni della variabile di controllo, permettendo quindi di valutare la moderazione dell'azione di controllo.

Se la funzione d'anello rispetta le ipotesi del criterio di Bode, a frequenze molto inferiori ad ω_c , $Q(j\omega) \approx 1/G(j\omega)$; in altri termini, all'interno della banda il controllo deve invertire la dinamica del processo. A frequenze molto superiori ad ω_c , $Q(j\omega) \approx R(j\omega)$; in altri termini, il regolatore lavora sostanzialmente in anello aperto.

Domanda 2

Si consideri il sistema di controllo schematizzato al punto precedente, con $G(s) = \frac{15s}{(1+100s)(1+20s)}$

Spiegare per quale motivo le prestazioni del sistema di controllo non possono essere soddisfacenti, comunque si scelga il regolatore $R(s)$.

La f.d.t. del processo ha uno zero nell'origine, che non può essere cancellata da un corrispondente polo nell'origine in $R(s)$ per non creare dinamiche nascoste del sistema non asintoticamente stabili; la funzione d'anello pertanto avrà uno zero nell'origine. Tale zero si trova anche nella funzione di trasferimento tra set point ed uscita, che avrà quindi guadagno statico nullo. In altri termini, qualunque variazione a scalino si applichi al set point, il valore finale dell'uscita resterà pari al valore iniziale di equilibrio, comportando quindi prestazioni statiche inaccettabili.

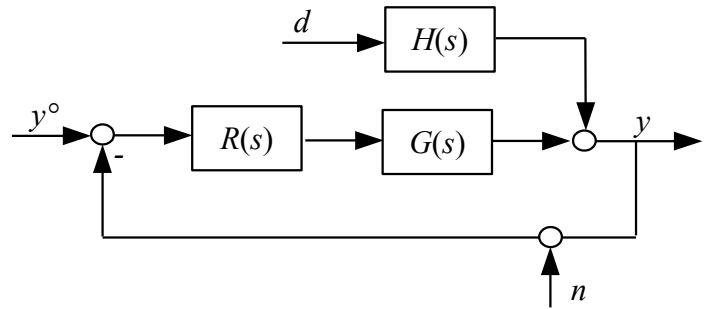
Domanda 3

Si consideri il seguente sistema di controllo (l'unità di misura delle costanti di tempo è il secondo):

$$R(s) = 0.015 \frac{1+100s}{100s}$$

$$G(s) = 300 \frac{1-10s}{(1+100s)(1+10s)(1+2s)}$$

$$H(s) = \frac{50}{1+100s}$$



3.1 Calcolare l'errore a transitorio esaurito a fronte di variazioni a scalino unitarie del riferimento y^o e del disturbo d .

Applicando il teorema del valore finale, si trova un valore nullo in entrambi i casi.

3.2 Calcolare la pulsazione critica ed il margine di fase del sistema di controllo. Tracciare quindi un diagramma qualitativo della risposta della variabile controllata y ad uno scalino unitario applicato al riferimento y^o .

La funzione d'anello risulta pari a $L(s) = 0.045 \frac{1-10s}{s(1+10s)(1+2s)}$

poichè il diagramma del modulo taglia l'asse 0dB ben prima delle frequenze relative ai poli e agli zeri non nell'origine, si deduce che $\omega_c = 0.045$. Il valore corrispondente del margine di fase risulta:

$$\varphi_m = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(10 \omega_c) - \arctan(10 \omega_c) - \arctan(2 \omega_c) = 36^\circ$$

che corrisponde alla presenza di una coppia di poli complessi nelle funzioni di trasferimento ad anello chiuso, con uno smorzamento pari a circa 0.36

La risposta di y a scalino su y^o può quindi essere approssimata con quella di una sistema con guadagno unitario e con una coppia di poli complessi coniugati aventi

$\omega_n = 0.045$ e $\xi = 0.036$. Il tempo di assestamento vale:

$$T_{ass} \approx 5/\xi\omega_c = 310 \text{ s.}$$

- 3.3** Valutare l'ampiezza asintotica delle oscillazioni della variabile controllata y a fronte di un andamento sinusoidale del disturbo in linea di andata d con ampiezza unitaria e periodo pari a 10 secondi.

La frequenza angolare del disturbo vale $\omega = 2\pi/T = 0.63 \gg \omega_c$. Pertanto la risposta in frequenza della f.d.t. tra d ed y vale circa $H(s)$. Applicando il teorema della risposta in frequenza si conclude che l'ampiezza in questione vale

$$|H(j \cdot 0.63)| = 50/|1 + j \cdot 0.63 \cdot 100| \approx 50/63 = 0.79$$

- 3.4** Valutare l'ampiezza asintotica delle oscillazioni della variabile di controllo u a fronte di un disturbo sinusoidale di ampiezza unitaria e di periodo 1 secondo del disturbo di misura n .

La frequenza angolare del disturbo vale $\omega = 2\pi/T = 6.3 \gg \omega_c$. Pertanto la risposta in frequenza della f.d.t. tra n ed y vale circa $-R(j\omega)$. Applicando il teorema della risposta in frequenza si conclude che l'ampiezza in questione vale

$$|-R(j \cdot 6.3)| \approx 0.015$$

- 3.5** La risposta della variabile controllata y ad una variazione a scalino di y° presenta delle sottoelongazioni? E' possibile eliminarle riprogettando opportunamente il regolatore $R(s)$? Motivare sinteticamente le risposte.

La f.d.t. $L(s)/(1+L(s)) = N(s)/(N(s)+D(s))$ ha come zeri gli zeri di $L(s)$, quindi ha uno zero positivo (1-10s). Questo causerà una sottoelongazione all'inizio del transitorio di risposta a scalino.

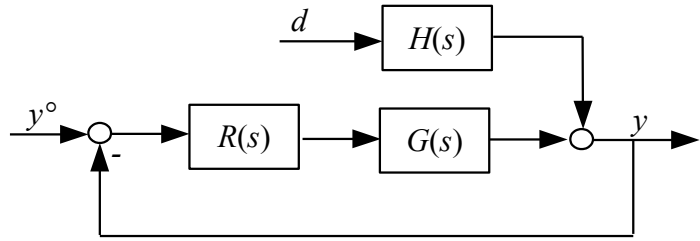
Tale sottoelongazione non è eliminabile: per farlo, occorrerebbe cancellare questo zero dalla funzione di trasferimento, introducendo un corrispondente polo nel regolatore $R(s)$ o nel prefiltro del riferimento (nell'ipotesi di impiegare un regolatore a due gradi di libertà). Così facendo si effettuerebbe una cancellazione polo/zero nel semipiano destro, ovvero si verrebbe a creare una dinamica nascosta instabile nel sistema, che non è accettabile perchè le sue variabili interne, che hanno comunque un significato fisico, avrebbero un andamento divergente a fronte di una generica perturbazione applicata al sistema.

Domanda 4

Si consideri il seguente sistema di controllo (l'unità di misura delle costanti di tempo è il secondo):

$$G(s) = 0.4 \frac{1}{s(1+3s)(1+s)}$$

$$H(s) = 5 \frac{1+s}{s(1+3s)}$$



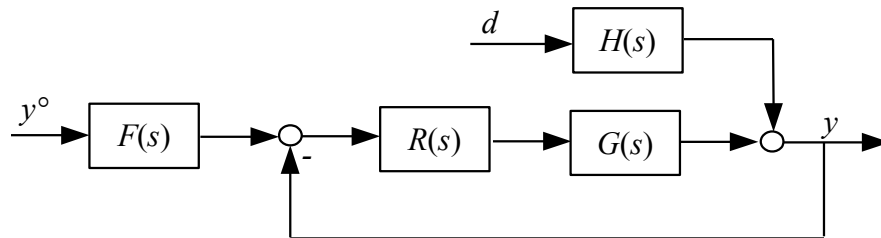
4.1 Progettare un regolatore di tipo PI (o PID, se necessario) con una banda di 0.2 rad/s ed un margine di fase di almeno 60° .

Poichè $\angle G(j0.2) = -90^\circ - \arctan(0.2 \cdot 3) - \arctan(0.2 \cdot 1) = -132^\circ = -180^\circ + 48^\circ$, un regolatore PI, che non può introdurre un anticipo di fase, non permette di raggiungere il margine di fase richiesto.

Si può risolvere il problema con un PID avente i seguenti parametri:

$$K_p = 0.5, T_i = 25, T_d = 3, N = 6$$

4.2 Progettare un regolatore a due gradi di libertà che garantisca la stessa reiezione dei disturbi del regolatore progettato al punto precedente, avendo però un tempo di assestamento della risposta di y a variazioni a scalino di y^o 10 volte maggiore.



Il regolatore in retroazione $R(s)$, che determina la reiezione del disturbo attraverso la funzione di sensitività, viene mantenuto invariato.

La f.d.t. tra set point e uscita del sistema trovato al punto precedente è approssimabile ad $1/(1+5s)$. Pertanto, si può ottenere una funzione di trasferimento 10 volte più lenta, ossia pari ad $1/(1+50s)$, prendendo

$$F(s) = (1+5s)/(1+50s)$$