Controlli Automatici

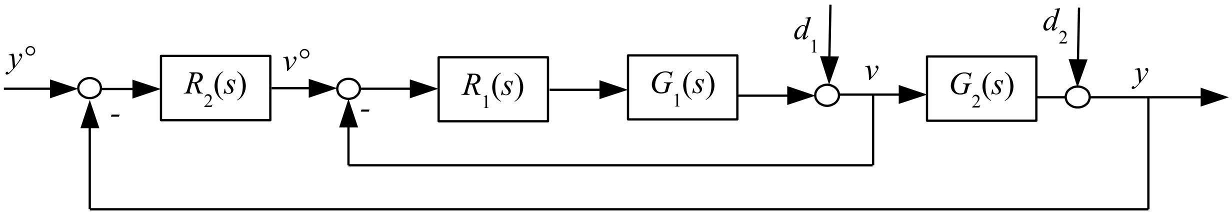
(Prof. Casella)

Appello 24 Luglio 2014

TRACCIA DI SOLUZIONE

Domanda 1

Disegnare lo schema a blocchi di un sistema di controllo in cascata, illustrando quindi i criteri di taratura dei regolatori ed i vantaggi e svantaggi di tale schema rispetto ad una regolazione a retroazione dell'errore standard.



Il sistema da controllare è caratterizzato da due dinamiche G_1(s) e G_2(s) e da una variabile misurabile intermedia *v*, tali per cui la prima permette più facilmente della seconda di chiudere un anello di retroazione con banda elevata.

Il regolatore interno R_1(s) viene tarato in modo che l'anello interno, che ha come funzione d'anello R_1(s)G_1(s), abbia una banda elevata; in tal modo il disturbo d_1 viene rigettato efficacemente. Il regolatore esterno R_2(s) viene tarato con una banda più contenuta. All'interno di questa banda, funzione di trasferimento tra $v°$ e v è circa unitaria, permettendo di approssimare la funzione d'anello esterna come R_2(s)G_2(s) ai fini della progetto di R_2(s).

I vantaggi di questo schema rispetto ad una semplice retroazione di *y,* che sarebbe vincolata da G_2(s) ad avere una banda contenuta, sono la migliore reiezione possibile per il disturbo d_1 e la maggiore insensibilità delle prestazioni della regolazione di *y* all'eventuale incertezza su G_1(s).

Domanda 2

Discutere le strategie di controllo in anello aperto ed in anello chiuso, evidenziando i rispettivi punti di forza e debolezza ed indicando in quali situazioni sia preferibile l'una piuttosto che l'altra.

Nel controllo in anello aperto, l'andamento della variabile di controllo è deciso in base al riferimento ed eventualmente ad una misura dei disturbi. Nel controllo in anello chiuso, il controllo è deciso in base al riferimento, alla misura della variabile controllata ed eventualmente ad una misura dei disturbi.

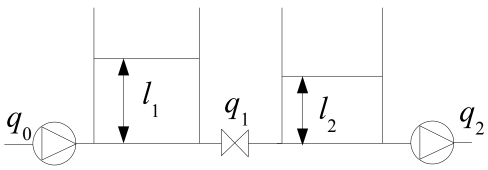
Il controllo in anello aperto risulta molto sensibile all'incertezza sul comportamento del sistema e sull'andamento di disturbi non misurati, ed è quindi adatto in casi in cui l'incertezza sia ridotta. Può essere indicato quando sia problematico misurare la variabile controllata (ad esempio, potenza termica erogata da una stufetta elettrica). Non è adatto al controllo di sistemi instabili.

Il controllo in anello chiuso, potendo confrontare l'andamento effettivo della variabile controllata con quello del riferimento, può essere reso molto più preciso anche in condizioni di incertezza sulla dinamica del sistema e sull'andamento di disturbi non misurati, ed è quindi indicato in condizioni di elevata incertezza, dove non sia problematico misurare la variabile controllata. Se la dinamica del sistema da controllare presenta ritardi, è però possibile che il regolatore destabilizzi il sistema; occorre quindi valutare con attenzione la stabilità del sistema ad anello chiuso; d'altra parte, può essere impiegato per stabilizzare sistemi instabili in anello aperto.

Domanda 3

Si consideri il seguente sistema, costituito da due serbatoi alimentati da pompe volumetriche e connessi tramite una valvola:

$$A\frac{dl_1}{dt}=q_0-q_1$$
$$A\frac{dl_2}{dt}=q_1-q_2$$
$$q_1=k\sqrt{l_1-l_2}$$



l_1 e l_2 sono i livelli dei due serbatoi, A la sezione dei serbatoi, q_0 e q_2 le portate delle due pompe e q_1 la portata attraverso la valvola.

3.1 Scrivere le equazioni di stato e di uscita del sistema, considerando q_0 e q_2 come variabili d'ingresso, l_1 , l_2 e q_1 come variabili d'uscita.

$$\frac{dl_1}{dt}=\frac{q_0-k\sqrt{l_1-l_2}}{A}$$
$$\frac{dl_2}{dt}=\frac{k\sqrt{l_1-l_2}-q_2}{A}$$
$$y_1=l_1$$
$$y_2=l_2$$
$$y_3=q_1=k\sqrt{l_1-l_2}$$

3.2 Calcolare le condizioni di equilibrio del sistema.

$$\bar{q}_0=\bar{q}_1=\bar{q}_2=\bar{q}$$
$$k\sqrt{\left(\bar{l}_1-\bar{l}_2\right)}=\bar{q}$$

3.3 Scrivere le equazioni linearizzate del sistema attorno a tale condizione di equilibrio.

$$\frac{d\,\Delta\,l_1}{dt}=\frac{\Delta\,q_0-k\dfrac{\Delta\,l_1-\Delta\,l_2}{2\sqrt{(\bar{l}_1-\bar{l}_2)}}}{A}=\frac{\Delta\,q_0-\bar{q}\dfrac{\Delta\,l_1-\Delta\,l_2}{2(\bar{l}_1-\bar{l}_2)}}{A}$$

$$\frac{d\,\Delta\,l_2}{dt}=\frac{\Delta\,q_2+k\dfrac{\Delta\,l_1-\Delta\,l_2}{2\sqrt{(\bar{l}_1-\bar{l}_2)}}}{A}=\frac{\Delta\,q_2+\bar{q}\dfrac{\Delta\,l_1-\Delta\,l_2}{2(\bar{l}_1-\bar{l}_2)}}{A}$$

$$\Delta\,y_1=\Delta\,l_1$$

$$\Delta\,y_2=\Delta\,l_2$$

$$\Delta\,y_3=\Delta\,q_1=k\frac{\Delta\,l_1-\Delta\,l_2}{2\sqrt{(\bar{l}_1-\bar{l}_2)}}=\bar{q}\frac{\Delta\,l_1-\Delta\,l_2}{2(\bar{l}_1-\bar{l}_2)}$$

3.4 Calcolare la funzione di trasferimento tra la variazione della portata d'ingresso Δq_0 e la corrispondente variazione della portata Δq_{01}, tracciandone quindi il diagramma qualitativo della risposta a scalino.

$$\Delta\,q_1=\frac{1}{2}\frac{1}{1+sT}\Delta\,q_0$$

$$T=A\frac{\bar{l}_1-\bar{l}_2}{\bar{q}}$$

3.5 Discutere l'eventuale presenza di cancellazioni polo/zero nella f.d.t. trovata al punto precedente.

La funzione di trasferimento trovata al punto precedente è del primo ordine, mentre il sistema dinamico è del secondo ordine, pertanto si è avuta una cancellazione polo/zero. E' immediato verificare che gli autovalori della matrice A del sistema linearizzato sono 0 e -1/T; il primo dei due è stato quindi cancellato da un corrispondente zero nell'origine. La dinamica nascosta è quella relativa al livello medio dei due serbatoi, che ha un polo nell'origine (aumentando q_0, entrambi i livelli crescono indefinitamente), ma non è visibile sull'uscita Δq_1, che è sensibile alla differenza dei due livelli.

Domanda 4

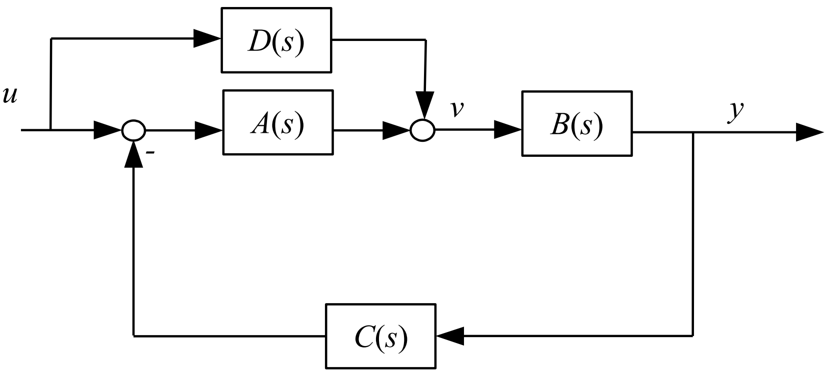
4.1 Calcolare le f.d.t tra l'ingresso *u* e le uscite *v, y* del seguente schema a blocchi:

$$A(s)=K$$

$$B(s)=10\frac{1+2\mathrm{s}}{s}$$

$$C(s)=\frac{0.2}{s}$$

$$D(s)=\frac{1}{1+s}$$



$$V(s)=\frac{A(s)+D(s)}{1+A(s)B(s)C(s)}=\frac{s^2(1+K+Ks)}{(1+s)(s^2+4\mathrm{Ks}+2\mathrm{K})}$$

$$Y(s)=B(s)\frac{A(s)+D(s)}{1+A(s)B(s)C(s)}=\frac{10s(1+K+Ks)(1+2\mathrm{s})}{(1+s)(s^2+4\mathrm{Ks}+2\mathrm{K})}$$

4.2 Valutare la stabilità di tali funzioni di trasferimento.

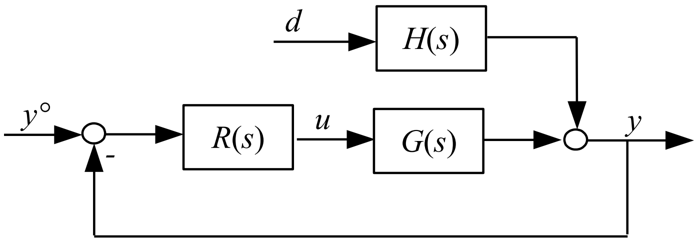
Entrambe le f.d.t. hanno tre poli, uno vale -1 ed ha quindi senz'altro parte reale negativa, gli altri due sono le radici del polinomio di secondo grado. Affinché entrambe le radici di tale polinomio siano a parte reale negativa, CNS è che tutti i coefficienti siano positivi, quindi se K > 0 il sistema è asintoticamente stabile. Quando K = 0 il sistema ha un polo nell'origine ed un polo a parte reale negativa, quindi è semplicemente stabile (si noti che c'è una cancellazione polo/zero nell'origine). Per K < 0 almeno una delle radici del polinomio di secondo grado è positiva, quindi il sistema è instabile.

Domanda 5

Si consideri il seguente sistema di controllo (l'unità di misura delle costanti di tempo è il secondo):

$$G(s) = -50\frac{e^{-10s}}{(1+2s)(1+0.5s)}$$

$$H(s) = 20\frac{1+s}{1+2s}$$



5.1 Progettare un regolatore di tipo PI (o PID, se necessario) con una pulsazione critica di 0.05 rad/s ed un margine di fase di almeno 40°.

Un regolatore PI con $K_p = -0.002$ e $T_i = 2$ soddisfa ampiamente la specifica con un margine di fase di circa 60°

5.2 Tracciare un diagramma qualitativo della risposta della variabile controllata y ad uno scalino del riferimento $y°$.

Dato il valore ottenuto del margine di fase, il diagramma è approssimabile con quello di una risposta del primo ordine con costante di tempo T = 1/0.05 = 20 e tempo di assestamento $T_{ass} = 100$. Per una maggiore accuratezza, è possibile anche considerare che la risposta resta nulla per i primi 10 secondi, a causa del ritardo puro presente nella dinamica del processo $G(s)$.

5.3 Discutere se sia possibile trovare un regolatore $R(s)$ che porti la pulsazione critica a 1 rad/s, sempre con un margine di fase di almeno 40°

Il sistema G(s) ha fase non minima a causa del ritardo puro di 10 secondi. Non è quindi possibile portare la banda a valori significativamente superiori all'inverso di tale valore, cioè 0.1 radianti al secondo, quindi la risposta è senz'altro negativa

5.4 Si supponga ora che il guadagno di $G(s)$ sia incerto e compreso tra -30 e -100. Progettare un regolatore PI (o PID) in modo da garantire una pulsazione critica di almeno 0.02 rad/s ed un margine di fase di almeno 40° in tutti i casi.

Supponendo di usare lo zero del regolatore PI per cancellare il polo di G(s), ponendo quindi $T_i = 2$, si ottiene la seguente funzione d'anello (μ è il guadagno di $G(s)$)

$$L(s) = \frac{\mu K_p}{2s} \frac{e^{-10s}}{(1+0.5s)}$$

che ha una pendenza di -20 dB/dec sulla banda di frequenze d'interesse, dato che il polo con costante di tempo 0.5 secondi si trova ad una frequenza molto più alta della massima banda possibile a causa della fase non minima.

E' immediato constatare che

$\omega_c = \mu K_p/2$

$\varphi_m = 90° - 570\omega_c - \mathrm{atan}(0.5\omega_c) = 90° - 285\mu K_p - \mathrm{atan}(0.5\mu K_p/2)$

e quindi la pulsazione critica cresce col modulo del guadagno di G, mentre il margine di fase cala. Per rispettare le specifiche si progetta K_p nel caso peggiore $\mu = -30$, ottenendo $K_p = -0.0013$.

Si verifica quindi che nel caso peggiore per il margine di fase, che è quello relativo a $\mu = -100$, il margine di fase vale circa 50° e quindi soddisfa ampiamente la specifica.