

Controlli e Regolazione Automatica – Prova scritta del 26 maggio 2005

Domanda 1

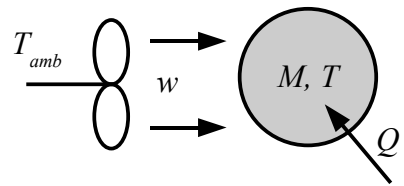
Disegnare lo schema a blocchi di un sistema di controllo in retroazione, descrivendo sinteticamente il ruolo di tutti i suoi componenti.

Soluzione 1

(vedere testo e appunti del corso)

Domanda 2

Si consideri il sistema rappresentato in figura: all'interno di un oggetto metallico di massa M viene dissipata una certa potenza termica Q ; lo stesso oggetto viene poi raffreddato da un flusso d'aria convogliato da un ventilatore. La portata d'aria di raffreddamento w è proporzionale alla velocità del ventilatore, che è di tipo “a giri variabili”. Il coefficiente di scambio tra il flusso d'aria e l'oggetto metallico è funzione della portata. Nell'ipotesi che la temperatura T dell'oggetto metallico sia uniforme, la dinamica del sistema è descritta dalle equazioni:



$$Mc \dot{T} = Q - Q_r$$
$$Q_r = hS (w/w_0)^{0.6} (T - T_{amb}) \quad ,$$

dove c è il calore specifico del metallo, Q_r è la potenza termica sottratta dal flusso d'aria di raffreddamento, h è il coefficiente di scambio al valore nominale della portata, S la superficie di scambio termico, w_0 la portata d'aria nominale (al massimo numero di giri), T_{amb} la temperatura ambiente, supposta costante.

Si supponga che:

- gli ingressi del sistema siano la portata d'aria w (variabile di controllo) e il calore dissipato Q (disturbo);
- la massa e il calore specifico dell'oggetto siano costanti;
- l'uscita di interesse sia la temperatura T .

Soluzione 2

1. Scrivere le equazioni di stato e di uscita del sistema.

$$\dot{T} = \frac{1}{Mc} \left[Q - hS \left(\frac{w}{w_0} \right)^{0.6} (T - T_{amb}) \right]$$
$$y = T$$

dove lo stato è la temperatura T , e gli ingressi esogeni sono Q e w .

2. Calcolare le condizioni di equilibrio del sistema quando il ventilatore lavora a pieni giri e la potenza termica dissipata vale Q_0 .

Ponendo $\bar{w}=w_0, \bar{Q}=Q_0$ e annullando la derivata dello stato si ottiene:

$$Q_0 = hS(\bar{T} - T_{amb})$$

$$\bar{T} = T_{amb} + \frac{Q_0}{hS}$$

3. Scrivere le equazioni linearizzate del sistema attorno a tale condizione di equilibrio nominale.

Le equazioni linearizzate attorno ad un equilibrio generico risultano:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{T} &= \frac{1}{Mc} \left[\Delta Q - 0.6 hS (T - T_{amb}) \left(\frac{\bar{w}}{w_0} \right)^{0.6} \frac{\Delta w}{\bar{w}} - hS \left(\frac{\bar{w}}{w_0} \right)^{0.6} \Delta T \right] \\ \Delta y &= \Delta T \end{aligned}$$

Nell'intorno dell'equilibrio nominale ($\bar{w}=w_0, \bar{Q}=Q_0$) risulta:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{T} &= -\frac{hS}{Mc} \Delta T + \frac{1}{Mc} \Delta Q - 0.6 \frac{Q_0}{Mc w_0} \Delta w \\ \Delta y &= \Delta T \end{aligned}$$

4. Calcolare le funzioni di trasferimento tra le variazioni degli ingressi e dell'uscita del sistema attorno all'equilibrio nominale, ponendole in forma guadagno/costanti di tempo.

$$\begin{aligned} \Delta T(s) &= \frac{1}{hS} \frac{1}{1 + \tau s} \Delta Q(s) - 0.6 \frac{Q_0}{hS w_0} \frac{1}{1 + \tau s} \Delta w(s) \\ \tau &= \frac{Mc}{hS} \end{aligned}$$

5. Tracciare i grafici qualitativi della risposta di ΔT a variazioni a scalino di ampiezza unitaria degli ingressi.

Sono gli usuali grafici di risposte a scalino per sistemi del primo ordine con un polo negativo (costante di tempo positiva). Si noti che la risposta ad uno scalino sulla portata w ha guadagno *negativo* (ovviamente, aumentando la portata d'aria, la temperatura tenderà a diminuire).

6. Si supponga ora di lavorare attorno ad un equilibrio in cui la potenza dissipata è un decimo di quella nominale. Le risposte del sistema sono più lente o più veloci di quelle attorno all'equilibrio nominale?

Si consideri l'equazione linearizzata attorno ad un generico equilibrio (punto 3). La matrice A del sistema (da cui dipende la risposta dinamica) in questo caso è uno scalare, quindi il suo unico autovalore coincide con il coefficiente che moltiplica ΔT :

$$\lambda = -\frac{hS}{Mc} \left(\frac{\bar{w}}{w_0} \right)^{0.6}$$

la costante di tempo corrispondente vale:

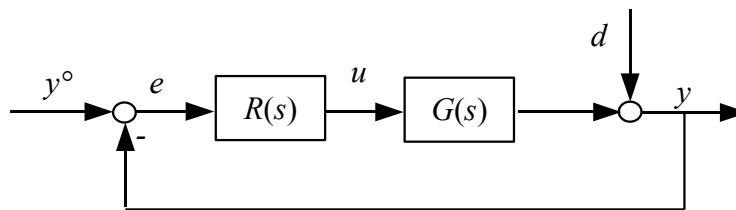
$$\tau = -\frac{1}{\lambda} = \frac{Mc}{hS} \left(\frac{w_0}{\bar{w}} \right)^{0.6}$$

Se tale equilibrio viene raggiunto diminuendo la portata di raffreddamento (in modo da mantenere costante il salto termico tra il corpo e l'ambiente esterno), la costante di tempo risulterà maggiore, e quindi le risposte del sistema saranno rallentate. Questo è spiegabile anche da un punto di vista intuitivo: la capacità termica rimane invariata, mentre il coefficiente di scambio diventa più piccolo, quindi è ragionevole aspettarsi che sia necessario un tempo maggiore per andare a regime.

Se invece tale regime viene raggiunto mantenendo la portata di raffreddamento invariata (cioè lasciando che il salto termico tra il corpo e l'ambiente esterno si riduca ad un decimo), la velocità di risposta rimarrà invariata.

Domanda 3

Si consideri il sistema di controllo rappresentato dal seguente schema a blocchi:



$$R(s) = 2 \frac{1+10s}{10s}$$

$$G(s) = \frac{1}{(1+10s)(1+s)}$$

Risposte 3.

1. Calcolare le funzioni di trasferimento (esatte) tra riferimento e uscita e tra disturbo e uscita.

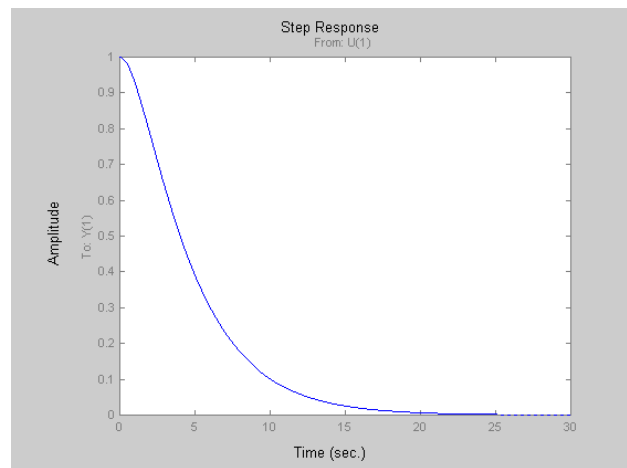
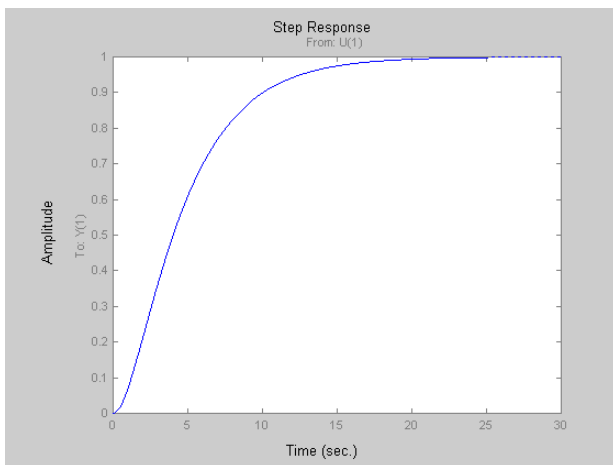
$$\frac{Y(s)}{Y^o(s)} = \frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)} = \frac{1}{1+5s+5s^2} = \frac{1}{(1+3.6s)(1+1.3s)}$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1+R(s)G(s)} = \frac{5s(1+s)}{1+5s+5s^2} = 5s \frac{1+s}{(1+3.6s)(1+1.3s)}$$

La cancellazione polo/zero (il sistema è del terz'ordine, mentre le f.d.t. sono solo del secondo) coinvolge un polo a parte reale negativa, e non comporta quindi problemi.

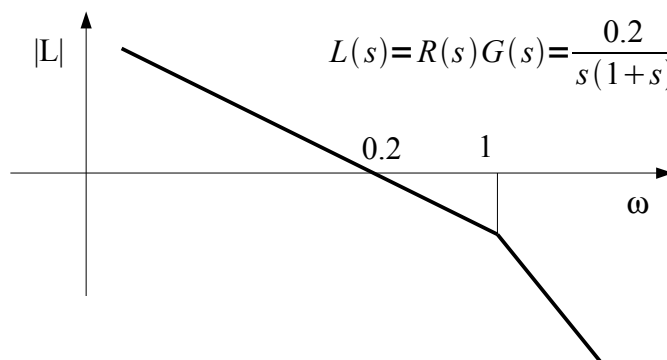
2. Tracciare il diagramma qualitativo delle risposte a scalino corrispondenti

- Per entrambe le risposte, il tempo di assestamento vale circa $5 \cdot 3.6 = 18$ s.
- La risposta al set point ha valore iniziale 0, derivata iniziale 0, derivata seconda iniziale 0.2, valore finale 1.
- La risposta al disturbo ha valore iniziale 1, derivata iniziale 0, derivata seconda iniziale -0.2, valore finale 0.
- Si possono quindi ricostruire i diagrammi qualitativi delle risposte; per confronto, sono qui rappresentati i diagrammi esatti.



3. Valutare pulsazione critica e margine di fase del sistema

Il diagramma di Bode asintotico del modulo della funzione d'anello:



taglia l'asse 0 dB nell'intervallo corrispondente all'integratore puro. La pulsazione critica è quindi circa uguale al guadagno, cioè $\omega_c = 0.2$. Il corrispondente margine di fase vale

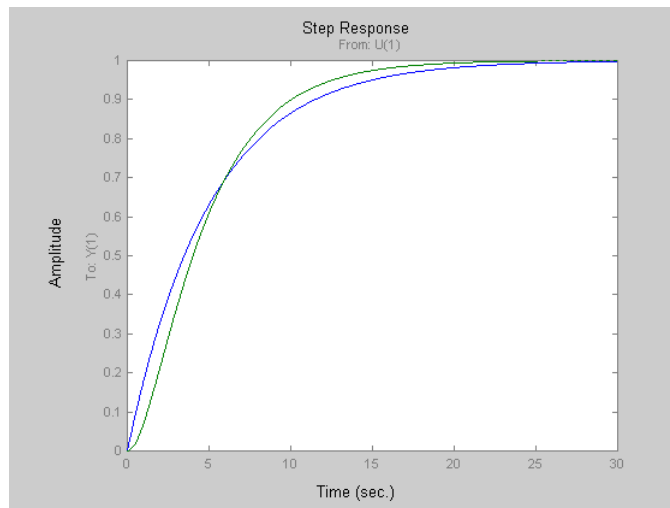
$$\varphi_m = 180^\circ - |-90^\circ - \text{atan}(0.2 \cdot 1)| = 79^\circ$$

4. Verificare che l'andamento qualitativo della risposta del sistema ad una variazione a scalino del set point, desumibile in base alla pulsazione critica e al margine di fase, è una approssimazione ragionevole dell'andamento esatto trovato in precedenza

Poichè il margine di fase è maggiore di 60° , la funzione di trasferimento tra set point e uscita è approssimabile ad una funzione del prim'ordine, con costante di tempo pari all'inverso della pulsazione critica:

$$F(s) \approx \frac{1}{1 + 5s}$$

il cui diagramma qualitativo è simile a quello della risposta esatta, salvo che negli istanti iniziali del transitorio (questo è ragionevole, perchè l'approssimazione è valida in bassa frequenza, cioè per le componenti più lente della risposta).



5. Si supponga ora di dimezzare il guadagno del regolatore. Quali conseguenze cio' comporta sulle prestazioni del sistema di controllo?

La pulsazione critica si dimezza, diventando pari a 0.1, mentre il margine di fase passa a 84° . Di conseguenza, la banda passante del sistema si dimezza, mentre il tempo di assestamento raddoppia. Il sistema continua ad essere ben smorzato (non ci sono oscillazioni), e le prestazioni statiche (errore nullo a transitorio esaurito a fronte di sollecitazioni a scalino) restano invariate.