Controlli e Regolazione Automatica – Prova scritta del 30 aprile 2009

Soluzioni

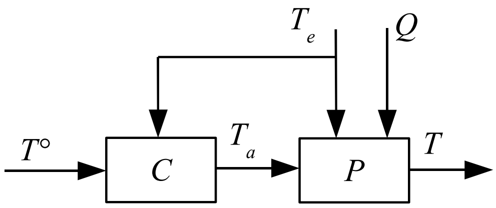
Domanda 1

Si consideri un impianto di riscaldamento domestico convenzionale, con radiatori alimentati da acqua calda. Si considerino quindi due possibili strategie di controllo, entrambe miranti a mantenere la temperatura dei locali ad un livello ottimale di comfort:

- A: in base ad una misura della temperatura esterna, viene variata opportunamente la temperatura di mandata della caldaia, mantenendo l'acqua calda sempre in circolo;
- B: la portata fluente in ogni radiatore viene modulata da una valvola termoregolatrice, in base alla temperatura dell'aria circostante misurata dalla stessa.

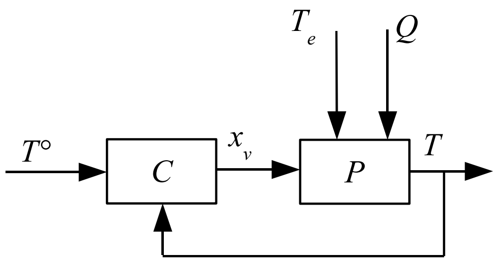
Facendo eventualmente uso di schemi a blocchi, classificare le due strategie in termini di controllo in anello aperto/chiuso, motivando la risposta, discutendone i relativi pregi e difetti.

La strategia A può essere rappresentata dal seguente schema a blocchi:



il sistema di controllo agisce sulla temperatura dell'acqua di mandata della caldaia (che gioca il ruolo di variabile di controllo) in base alla misura della temperatura esterna e del valore di temperatura desiderato. Si tratta chiaramente di una strategia in anello aperto, che richiede un solo sensore ed un solo attuatore per tutto l'impianto, quindi ha la minima complessità dal punto di vista della strumentazione, ma richiede una accurata calibrazione, oltre ad essere poco robusto nei confronti di tutti gli effetti termici non dipendenti dalla temperatura esterna (rappresentati dal disturbo Q nello schema), quali irraggiamento solare, apporti di aria dall'esterno a causa di imperfette tenute dei serramenti o aperture di areazione, etc.

La strategia B è invece descritta da questo schema:



l'apertura x_v della valvola termoregolatrice viene adattata in base alla misura della temperatura dell'aria circostante, determinando quindi l'afflusso di acqua calda al radiatore. Si tratta di una strategia in anello chiuso, come evidente dallo schema a blocchi. Questo sistema richiede un sensore e un attuatore per ogni radiatore (a volte integrati nello stesso dispositivo, come nel caso delle valvole termostatiche di comune impiego), quindi ha un costo di strumentazione più elevato. D'altra parte, permette una regolazione accurata a dispetto di tutti i disturbi agenti sul sistema, e non richiede una taratura accurata come nel caso precedente per funzionare in modo soddisfacente.

Domanda 2

Si consideri un sistema idraulico costituito da due laghi di superficie A_1 e A_2. Il primo lago riceve una portata volumetrica q_1 da una diga a monte, e scarica una portata q_2 nel secondo lago che si trova a valle. Il secondo lago riceve la portata q_2 uscente dal primo e scarica una portata q_3 in un corso d'acqua emissario. Le portate di efflusso sono proporzionali alla radice quadrata del livello l sopra lo zero idrometrico del lago a monte. Entrambi i laghi ricevono inoltre ciascuno una quota della portata dovuta alle precipitazioni atmosferiche q_p.

Si puo quindi descrivere il sistema mediante le seguenti equazioni:

$$
\begin{aligned}
&A_1 \dot{l}_1 = q_1 + \alpha\, q_p - q_2 \\
&A_2 \dot{l}_2 = q_2 + \beta\, q_p - q_3 \\
&q_2 = k_1 \sqrt{l_1} \\
&q_3 = k_2 \sqrt{l_2}
\end{aligned}
\quad ,
$$

Si considerino come ingressi esogeni la portata di scarico della diga q_1 (variabile manipolabile) e la portata delle precipitazioni q_p (disturbo). Si consideri come uscita il livello del secondo lago l_2.
Si chiede di:

1. Scrivere le equazioni di stato e di uscita del sistema

Le equazioni di stato e di uscita si ottengono esplicitando le derivate delle due variabili di stato l_1 e l_2 e la variabile d'uscita y come funzioni delle variabili di stato e delle variabili d'ingresso q_1 e q_p:

$$
\begin{aligned}
&\dot{l}_1 = \frac{1}{A_1}\left(-k_1 \sqrt{l_1} + q_1 + \alpha\, q_p\right) \\
&\dot{l}_2 = \frac{1}{A_2}\left(k_1 \sqrt{l_1} - k_2 \sqrt{l_2} + \beta\, q_p\right) \\
&y = l_2
\end{aligned}
$$

2. Calcolare le condizioni di equilibrio del sistema per un dato valore della portata di scarico della diga, assumendo precipitazioni nulle

Annullando le derivate e la portata q_p si trova

$$
\begin{aligned}
&\bar{q}_1 = k_1 \sqrt{\bar{l}_1} \\
&\bar{q}_1 = k_2 \sqrt{\bar{l}_2} \\
&\bar{y} = \bar{l}_2
\end{aligned}
$$

3. Scrivere le equazioni del sistema linearizzate attorno a tale condizione di equilibrio.

$$
\begin{aligned}
&\Delta\, \dot{l}_1 = -\frac{k_1}{2 A_1 \sqrt{\bar{l}_1}} \Delta\, l_1 + \frac{1}{A_1} \Delta\, q_1 + \frac{\alpha}{A_1} \Delta\, q_p \\
&\Delta\, \dot{l}_2 = +\frac{k_1}{2 A_2 \sqrt{\bar{l}_1}} \Delta\, l_1 - \frac{k_2}{2 A_2 \sqrt{\bar{l}_2}} \Delta\, l_2 + \frac{\beta}{A_2} \Delta\, q_p \\
&\Delta\, y = \Delta\, l_2
\end{aligned}
$$

4. Calcolare le funzioni di trasferimento tra le variazioni dei due ingressi e quelle dell'uscita, mettendole in forma guadagno/costanti di tempo.

Trasformando le equazioni secondo Laplace, calcolando Δl_1 nella prima, sostituendolo nella seconda e raccogliendo i termini noti dei polinomi nel guadagno, si trova:

$$\Delta y = \frac{\tau_2}{A_2} \frac{1}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} \Delta q_1 + \frac{\tau_2(\alpha+\beta)}{A_2} \frac{1+s\tau}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} \Delta q_p$$

$$\tau_1 = \frac{2A_1\sqrt{\overline{l}_1}}{k_1}, \tau_2 = \frac{2A_2\sqrt{\overline{l}_2}}{k_2}, \tau = \tau_1 \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

5. Tracciare i grafici qualitativi della risposte a scalino delle f.d.t. trovate.

Per quanto riguarda la risposta ad una variazione a scalino della portata q_1, la f.d.t. ha due poli e nessuno zero, quindi ha valore iniziale e derivata iniziale nulli e tende asintoticamente al valore del guadagno per $t \to \infty$; il transitorio si esaurisce a tutti gli effetti pratici dopo 5 volte la maggiore delle costanti di tempo τ_1, τ_2.

Per quanto riguarda invece la risposta ad una variazione a scalino della portata q_p, la f.d.t. ha due poli e uno zero, quindi ha valore iniziale zero, derivata iniziale positiva, e tende asintoticamente al valore del guadagno per $t \to \infty$; il transitorio si esaurisce a tutti gli effetti pratici dopo 5 volte la maggiore delle costanti di tempo τ_1, τ_2. E' immediato verificare che la costante di tempo τ dello zero è minore di τ_1 , quindi non ci sono sovraelongazioni (picchi di piena) nella risposta.

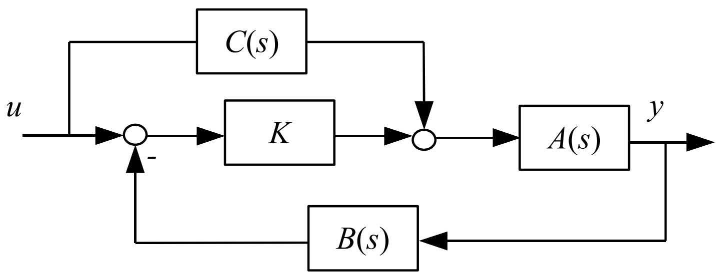
Domanda 3

Calcolare la f.d.t tra l'ingresso e l'uscita del seguente schema a blocchi, valutandone la stabilità al variare del parametro K:

$$A(s) = 5\frac{1-s}{(1+s)^2}$$

$$B(s) = \frac{1+s}{s}$$

$$C(s) = \frac{1}{1+s}$$



La funzione di trasferimento del sistema vale

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{A(s)[C(s)+K]}{1+K\,A(s)B(s)} = 5\frac{s(1+K+Ks)(1-s)}{(1+s)^2[s^2+(1-5\mathrm{K})s+5\mathrm{K}]}$$

I primi due poli valgono -1, quindi hanno parte reale negativa. Gli altri due sono a parte reale strettamente negativa se e solo se i tre coefficienti sono tutti positivi. Il sistema è quindi asintoticamente stabile per $0 < K < 0.2$. Agli estremi di tale intervallo, si hanno uno o due poli semplici a parte reale nulla, mentre gli altri poli hanno parte reale negativa, quindi il sistema è semplicemente stabile. Al di fuori, un polo è sempre positivo, quindi il sistema è instabile.