

Controlli Automatici

(Prof. Casella)

Appello 3 Luglio 2014

TRACCIA DELLA SOLUZIONE

Domanda 1

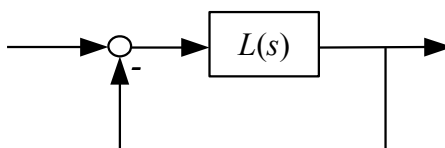
Enunciare con precisione come si può determinare la stabilità esterna di un sistema lineare descritto dalla sua funzione di trasferimento. Trovare quindi due sistemi stabili, con funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$, tali che la connessione in cascata formi un sistema instabile.

Se la funzione di trasferimento ha tutti i poli a parte reale negativa, il sistema è asintoticamente stabile; se ha tutti i poli a parte reale negativa o nulla, almeno un polo a parte reale nulla e tutti i poli a parte reale nulla semplici, il sistema è semplicemente stabile, altrimenti il sistema è instabile.

$G_1(s) = G_2(s) = 1/s$ sono semplicemente stabili, mentre la loro connessione in cascata ha funzione di trasferimento $G_1(s) = 1/s^2$, che è instabile. Si noti che la connessione in cascata preserva la stabilità asintotica, ma non quella semplice.

Domanda 2

Enunciare con precisione il criterio di stabilità di Bode per sistemi lineari retroazionati.

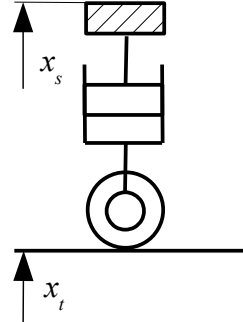


Con riferimento allo schema in figura, occorre che siano verificate due condizioni di applicabilità sulla funzione d'anello $L(s)$: la funzione deve avere poli a parte reale negativa o nulla e la condizione $|L(j\omega_c)| = 1$ deve essere soddisfatta per un unico valore ω_c . Detto μ_L il guadagno della funzione $L(s)$ e definito il margine di fase come $\phi_m = 180^\circ - \angle L(j\omega_c)$, condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema ad anello chiuso è che $\mu_L > 0$ e $\phi_m > 0$.

Domanda 3

Si consideri la sospensione a gas schematizzata in figura: un corpo di massa M è collegato alla ruota appoggiata sul terreno tramite una molla a gas di sezione A , pressione P e volume V . Si assume che la ruota sia infinitamente rigida e che il gas nel pistone compia una trasformazione politropica di indice γ . Le equazioni che governano il sistema sono:

$$\begin{aligned}\dot{x}_s &= v \\ M \dot{v} &= -Mg + PA \\ V &= A(x_s - x_t - x_m) \\ PV^\gamma &= K\end{aligned}$$



dove v è la velocità verticale della massa sospesa, g è l'accelerazione di gravità, x_s è la quota della massa sospesa, x_t la quota del punto di contatto della ruota col terreno, x_m è una costante geometrica della sospensione e K una costante che dipende dalla carica di gas.

3.1 Scrivere le equazioni di stato e di uscita del sistema, considerando la quota del punto di contatto x_t come ingresso e le quota della massa sospesa x_s come uscita

$$\begin{aligned}\dot{x}_s &= v \\ \dot{v} &= -g + \frac{AK}{M(A(x_s - x_t - x_m))^\gamma} = -g + \frac{A^{1-\gamma} K}{M(x_s - x_t - x_m)^\gamma} \\ y &= x_s\end{aligned}$$

3.2 Calcolare le condizioni di equilibrio del sistema

$$\begin{aligned}\bar{v} &= 0 \\ \bar{x}_s &= \bar{x}_t + \bar{x}_m + \sqrt[\gamma]{\frac{A^{1-\gamma} K}{Mg}}\end{aligned}$$

3.3 Scrivere le equazioni linearizzate del sistema attorno a tale equilibrio

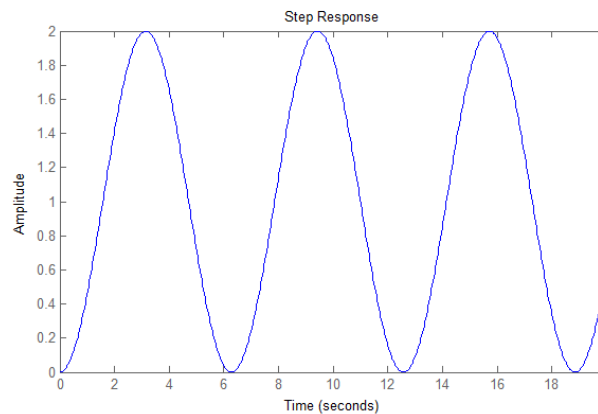
$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_s &= \Delta v \\ \Delta \dot{v} &= -\frac{\gamma A^{1-\gamma} K}{M(\bar{x}_s - \bar{x}_t - x_m)^{\gamma+1}}(\Delta x_s - \Delta x_t) = \frac{-\gamma g}{\bar{x}_s - \bar{x}_t - x_m}(\Delta x_s - \Delta x_t) \\ \Delta y &= \Delta x_s\end{aligned}$$

3.4 Calcolare la f.d.t. tra Δx_t e Δx_s

$$\Delta \dot{x}_s = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \Delta x_t, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma A^{1-\gamma} K}{M (\bar{x}_s - \bar{x}_t - x_m)^{\gamma+1}}} = \sqrt{\frac{\gamma g}{\bar{x}_s - \bar{x}_t - x_m}}$$

3.5 Tracciare il diagramma qualitativo della risposta a scalino della f.d.t. trovata. Dire come si modifichi tale diagramma nell'ipotesi che la molla perda gas e quindi diminuisca la costante K .

Il sistema manifesta la classica risposta cosinusoidale permanente di un sistema con poli immaginari puri. La risposta non tende ad un valore costante, a causa dell'assenza del termine di smorzamento, ed oscilla permanentemente tra il valore 0 e il valore 2. Il guadagno è unitario e le oscillazioni hanno periodo $T = 2\pi/\omega_n$.



Se si riduce la carica della molla e quindi la costante K a parità di massa M , il valore di equilibrio di $x_s - x_t$ si riduce, quindi aumenta la pulsazione naturale ω del sistema e di conseguenza diminuisce il periodo delle oscillazioni. Il guadagno resta unitario.

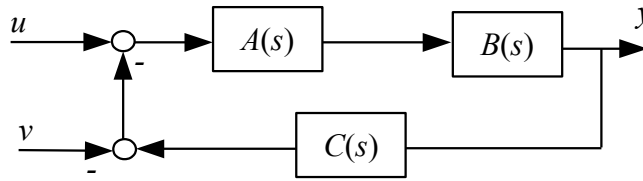
Domanda 4

4.1 Calcolare le f.d.t tra gli ingressi u , v e l'uscita y del seguente schema a blocchi:

$$A(s) = \frac{0.5}{s}$$

$$B(s) = \frac{2}{(1+s)}$$

$$C(s) = \frac{0.2}{(1+0.1s)}$$



$$Y(s) = F(s)U(s) + F(s)V(s)$$

$$F(s) = \frac{A(s)B(s)}{1 + A(s)B(s)C(s)} = \frac{1+0.1s}{0.1s^3 + 1.1s^2 + s + 0.2}$$

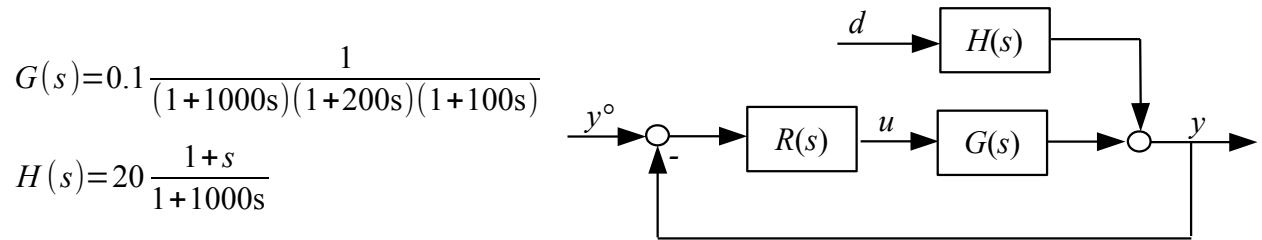
4.2 Valutare la stabilità di tali funzioni (si consiglia di impiegare il criterio di Bode).

La stabilità del sistema retroazionato può essere studiata utilizzando il criterio di Bode, dato che la funzione d'anello $L(s) = A(s)B(s)C(s)$ soddisfa le ipotesi di applicabilità del criterio e che il sistema ha una retroazione negativa. Si noti che, a meno di cancellazioni (non presenti in questo caso, in cui entrambe le funzioni trovate sono del terzo ordine, come il sistema complessivo), i poli delle funzioni di trasferimento tra i diversi ingressi e le diverse uscite del sistema sono sempre le radici del polinomio caratteristico, quindi il criterio di Bode permette di valutare la stabilità di tutte queste funzioni in un sol colpo.

Tracciando i diagrammi di Bode di $L(s)$ è immediato verificare che la pulsazione critica vale 0.2 ed il margine di fase circa 78° , che è un valore senz'altro positivo. Essendo pure positivo il guadagno della funzione d'anello, si può concludere che le funzioni di trasferimento in questione sono asintoticamente stabili.

Domanda 5

Si consideri il seguente sistema di controllo (l'unità di misura delle costanti di tempo è il secondo):



5.1 Progettare un regolatore di tipo PI (o PID, se necessario) con una banda di $1.5 \cdot 10^{-3}$ rad/s ed un margine di fase di almeno 60° .

La specifica richiede $\varphi_m = 180 + \angle G(j\omega_c) + \angle R(j\omega_c) > 60^\circ$.

La fase $\angle G(j\omega_c) = -82^\circ$, pertanto deve essere per soddisfare la specifica occorre che $\angle R(j\omega_c) > 60^\circ - 180^\circ + 82^\circ > -38^\circ$. Non occorrendo un anticipo di fase alla pulsazione critica, si conclude che è sufficiente un regolatore PI per soddisfare la specifica. Si può prendere ad esempio:

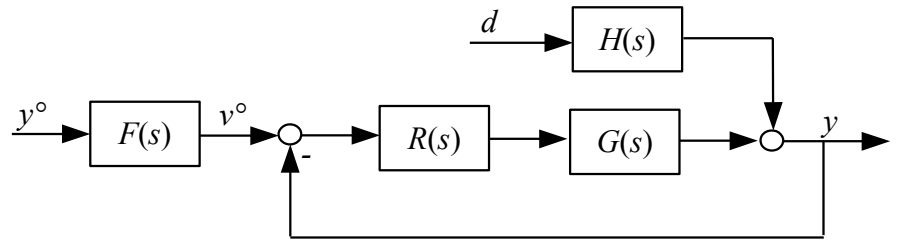
$$K_p = 15, T_i = 1000$$

$$\varphi_m = 64^\circ$$

5.2 Tracciare un diagramma qualitativo della risposta della variabile controllata y ad uno scalino del riferimento y^o .

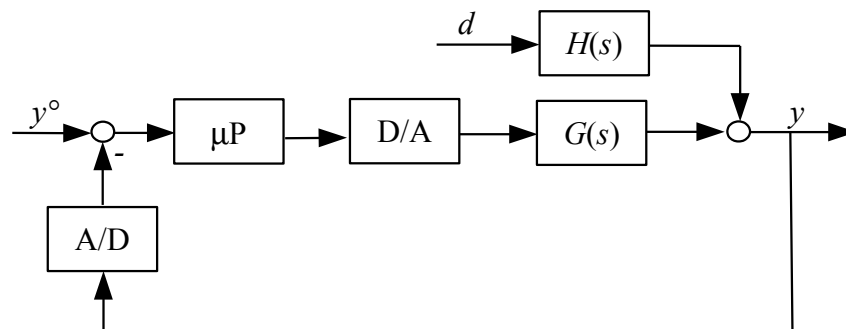
Dato l'elevato margine di fase, in prima approssimazione il sistema risponde come un sistema del primo ordine con guadagno unitario, costante di tempo 670 s e tempo di assestamento 3300 s.

- 5.3** Progettare uno schema di controllo che garantisca la stessa risposta dell'uscita y e del controllo u a variazioni del disturbo d ottenuta col regolatore progettato in precedenza, ma che permetta di ridurre di un fattore 3 il tempo di assestamento ad una variazione a scalino del riferimento y° .



Si può ricorrere ad uno schema a due gradi di libertà con prefiltraggio del riferimento. La funzione di trasferimento tra v° e y può essere approssimata dalla funzione $F_1(s) = 1/(1+670s)(1+200s)(1+100s)$, ed ha un polo dominante con costante di tempo $670s$. Antepoendo un filtro $F(s) = (1+670s)/(1+223s)$ si ottiene una funzione di trasferimento tra y° e y con le caratteristiche desiderate, senza modificare la risposta del sistema al disturbo d rispetto a quanto ottenuto al punto 5.1.

- 5.4** Tracciare lo schema a blocchi di una implementazione digitale del sistema progettato al punto 5.1. Nell'ipotesi che il ritardo di elaborazione sia pari all'intero periodo di campionamento T_c , scegliere tale periodo in modo che la riduzione di margine di fase rispetto all'implementazione analogica non superi i 10° .



Il blocco A/D converte le misure a tempo continuo di y in quantità digitali con un periodo T_c . Il microprocessore esegue, sempre con periodo T_c , un programma basato su algoritmi di calcolo numerico che approssima la dinamica del regolatore PI progettato in precedenza. I valori calcolati sono poi convertiti in quantità analogiche dal convertitore D/A ed inviate agli attuatori del sistema.

L'implementazione digitale aggiunge un ritardo alla funzione d'anello che è la somma del ritardo intrinseco di campionamento, pari a $T_c/2$, e del tempo di elaborazione, che è pari a T_c . La perdita di margine di fase è quindi pari a:

$$\Delta \varphi_m = -\frac{3}{2} T_c \omega_c \frac{180^\circ}{\pi} > -10^\circ$$

da cui si ricava $T_c < 78 \text{ s}$.