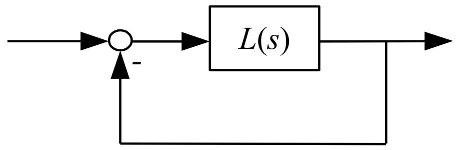
Controlli Automatici

(Prof. Casella)

Prova scritta 1 Luglio 2013

SOLUZIONI



Domanda 1

Con riferimento al sistema rappresentato in figura, enunciare con precisione il criterio di stabilità di Bode.

Si supponga che la funzione di trasferimento $L(s)$ abbia tutti i poli con parte reale non negativa e che il modulo della risposta in frequenza sia pari ad uno per un solo valore di frequenza ω_c. detto pulsazione critica. Sia μ_L il guadagno della f.d.tt. $L(s)$.

Si definisca lo sfasamento critico $\varphi_c = \angle L(j\omega_c)$ ed il margine di fase $\varphi_m = 180° - |\varphi_c|$

Condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema ad anello chiuso è che

$\mu_L > 0$, $\varphi_m > 0$

Domanda 2

Pronunciarsi sulla stablità dei seguenti sistemi lineari:

	As. stabile	Sempl. stabile	Instabile
$\dfrac{s-1}{s^3+10s}$	☐	☒	☐
$\dfrac{s+1}{s^2-s+3}$	☐	☐	☒
$\dfrac{s-1}{(s+4)^2}$	☒	☐	☐
$\dfrac{10}{(s^2+4)}$	☐	☒	☐
$\dfrac{5}{s^2+0.1s+0.01}$	☒	☐	☐
$\dfrac{1}{2s^2-10s}$	☐	☐	☒
$\dfrac{s+1}{s^3}$	☐	☐	☒
$\dfrac{1}{s^4-1}$	☐	☐	☒

Domanda 3

Si consideri il seguente sistema lineare:

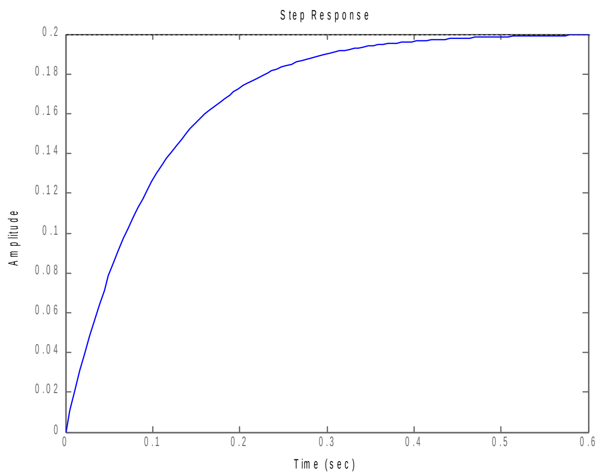
$$\dot{x}_1 = -10\,x_1 + 2\,u$$
$$\dot{x}_2 = 4\,x_1 - 5\,x_2$$
$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = -x_1 + \alpha\,x_2 \quad ,$$

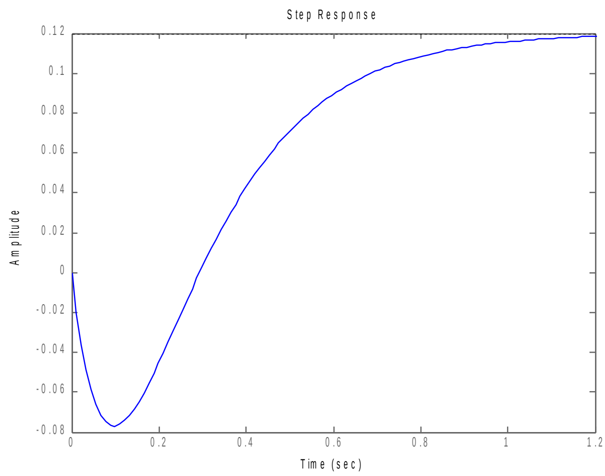
3.1 Posto $\alpha = 2$, calcolare le funzioni di trasferimento tra l'ingresso u e le uscite y_1 e y_2 del sistema, ponendole in forma guadagno/costanti di tempo

$$G_1(s) = \frac{2}{s+10} = \frac{0.2}{1+0.1\mathrm{s}}$$

$$G_2(s) = \frac{6-2\mathrm{s}}{(s+10)(s+5)} = 0.12\,\frac{1-0.33\mathrm{s}}{(1+0.1\mathrm{s})(1+0.2\mathrm{s})}$$

3.2 Tracciare i diagrammi qualitativi delle risposte a scalino delle due f.d.t. sopra trovate.





3.3 Trovare il valore α che porta ad un valore finale nullo della risposta a scalino di y_2.

Per avere un valore finale nullo della risposta a scalino, occorre che $G_2(0) = 0$, ovvero che $G_2(s)$ abbia uno zero nell'origine. Essendo

$$G_2(s) = \frac{(8\alpha - 10) - 2s}{(s+10)(s+5)}$$

dovrà essere $\alpha = 1.25$

3.4 Si consideri ora la sola uscita y_1. Sono presenti cancellazioni polo/zero nella funzione di trasferimento del sistema? Motivare la risposta

La f.d.t. $G_2(s)$ ha un solo polo in s = -10, mentre il sistema in esame è del secondo ordine. Essendo il numero di poli della f.d.t. minore del numero di stati del sistema, si può affermare che è avvenuta una cancellazione polo/zero. Considerando che gli autovalori della matrice A del sistema sono -10 e -5, la cancellazione è in $s = -5$.

3.5 Si assuma ora di applicare un segnale sinusoidale all'ingresso $u = \cos(\omega t)$. Esistono valori della pulsazione ω per cui l'uscita asintotica y_1 risulti sfasata di $-120°$ rispetto all'ingresso?Motivare la risposta

La f.d.t. $G_1(s)$ ha un polo reale negativo e nessuno zero. Il suo argomento (che corrisponde allo sfasamento dell'uscita rispetto all'ingresso per il teorema della risposta in frequenza) è pari ad $-arctan(0.1\ \omega)$, ed è quindi compreso tra 0 e -90°. Non esiste quindi alcun valore di ω che porti ad uno sfasamento dell'uscita di -120°.

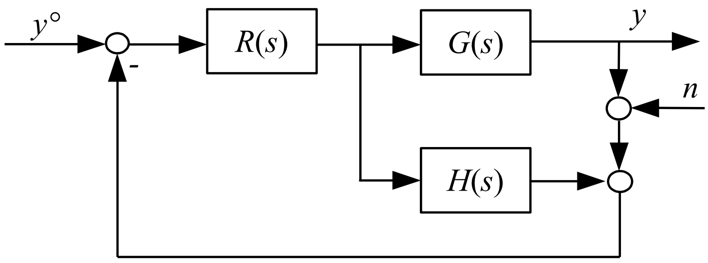
Domanda 4

Si consideri il seguente schema a blocchi:

$$R(s)=\frac{K}{s}$$

$$G(s)=5\,\frac{e^{-5s}}{1+s}$$

$$H(s)=5\,\frac{1-e^{-5s}}{1+s}$$



4.1 Calcolare le f.d.t tra gli ingressi $y°$ ed n e l'uscita y

$$\frac{Y(s)}{Y°(s)}=\frac{R(s)G(s)}{1+R(s)[G(s)+H(s)]}=\frac{5K\,e^{-5s}}{s^2+s+5\mathrm{K}}$$

$$\frac{Y(s)}{N(s)}=-\frac{R(s)G(s)}{1+R(s)[G(s)+H(s)]}=-\frac{5K\,e^{-5s}}{s^2+s+5\mathrm{K}}$$

4.2 Calcolare per quali valori del parametro K il sistema risulta asintoticamente stabile.

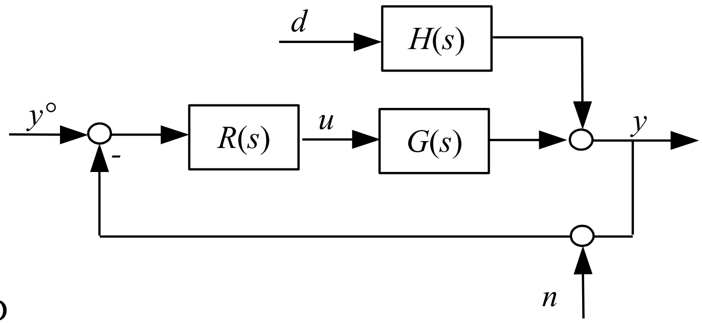
In entrambi i casi la dinamica del sistema è data dalla connessione di un ritardo puro (che è asintoticamente stabile) e di un sistema dinamico del secondo ordine, per il quale CNS per la stabilità è che tutti i coefficienti al denominatore abbiano lo stesso segno. Pertanto il sistema è asintoticamente stabile per $K > 0$

Domanda 5

Si consideri il sistema di controllo rappresentato in figura (l'unità di misura dei tempi è il secondo).

$$G(s) = -0.1\frac{e^{-5s}}{s(1+5s)}$$

$$H(s) = 3\frac{e^{-5s}}{s(1+5s)}$$



5.1 Progettare un regolatore di tipo PID con una pulsazione critica di 0.1 rad/s ed un margine di fase di almeno 50°

$$R(s) = K_p\left(1+\frac{1}{sT_i}+\frac{sT_d}{1+s\frac{T_d}{N}}\right) \approx K_p\frac{(1+sT_i)(1+sT_d)}{sT_i(1+s\frac{T_d}{N})}$$

Posto Td = 5, Ti ed N sufficientemente elevati per garantire l'attraversamento dell'asse 0 dB con una pendenza asintotica di -20 dB/dec, si trova

$$L(s) = -0.1K_p\frac{e^{-5s}(1+sT_i)}{s^2T_i(1+s\frac{T_d}{N})}$$

$$K_p = -10\,\omega_c = -1$$

$$\phi_m = atan(\omega_c T_i) - atan(\omega_c T_d/N) - 5\,\omega_c\frac{180°}{\pi}$$

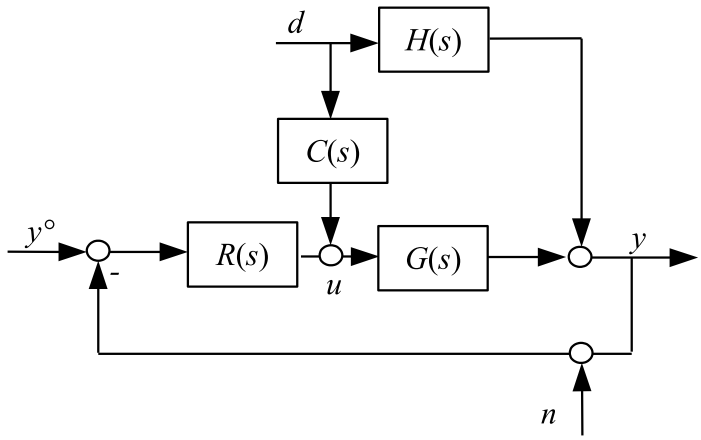
Posto, ad es., $T_i = 80$, $N = 10$, si ottiene $\varphi_m = 51°$

5.2 Valutare l'ampiezza asintotica delle oscillazioni della variabile di controllo *u* a fronte di un disturbo n = 0.1 sin(10*t*)

A frequenze molto maggiori di ω_c, il modulo della f.d.t. tra *n* ed *u* vale $|R(j\omega)|$, che a sua volta a frequenze molto maggiori di N/T_d vale $|K_p N| = 10$. Per il teorema della risposta in frequenza, l'ampiezza delle oscillazioni di *u* vale quindi $0.1\cdot 10 = 1$.

5.3 Progettare un compensatore del disturbo che sia efficace in una banda di frequenze compresa tra 0 e 1 rad/s. Spiegare perchè la dinamica del sistema rende la compensazione del disturbo particolarmente efficace.

$$C(s) = -\frac{H(s)}{G(s)} = 30$$



A meno di un fattore moltiplicativo, la dinamica del sistema tra la variabile manipolabile e l'uscita controllata è la stessa che si trova tra il disturbo e la variabile controllata. E' quindi possibile implementare un compensatore ideale del disturbo, che annulla completamente l'effetto del disturbo sull'uscita (ovviamente nell'ipotesi idealizzata di assenza di errori di misura e di errori di modellazione del sistema).

5.4 Si supponga che, a causa di un errore di montaggio del sistema, l'attuatore funzioni a rovescio rispetto alle condizioni di progetto (ad esempio, a fronte di un comando di apertura del 30%, la valvola si apre del 70%, mentre a fronte di un comando di apertura del 70%, la valvola si apre del 30%). Quale sarà il comportamento del sistema ad anello chiuso? Motivare la risposta.

L'errata configurazione dell'attuatore cambia il segno della f.d.t. $G(s)$. Pertanto, per il criterio di Bode, il sistema di controllo ad anello chiuso risulta instabile.