Controlli Automatici – Prova scritta in itinere 3 maggio 2011
Soluzioni

Domanda 1

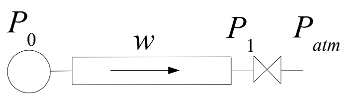
Definire con precisione la funzione di trasferimento di un sistema dinamico lineare. Spiegare quindi come si possa valutare la stabilità degli equilibri del sistema sulla base di tale funzione.

Vedere testo o dispense del corso.

Domanda 2

Si consideri il sistema idraulico costituito da una condotta cilindrica orizzontale collegata all'ingresso ad una sorgente a pressione costante P_0 ed all'uscita ad una valvola che scarica a pressione atmosferica P_{atm}. Assumendo che il fluido sia incomprimibile e che le perdite di carico distribuite nella condotta siano trascurabili, la dinamica del sistema è descritta dalle equazioni della quantità di moto nella condotta e nella valvola:

$$\frac{L}{A}\frac{dw}{dt}+P_1-P_0=0$$
$$w=K_v\sqrt{P_1-P_{atm}}$$



dove L è la lunghezza della condotta, A la sua sezione, w la portata che attraversa la condotta e la valvola, K_v il coefficiente (variabile) di efflusso della valvola e P_1 la pressione all'uscita della condotta.

Si chiede di:

1. Scrivere le equazioni di stato e di uscita del sistema, considerando K_v come variabile d'ingresso e w e P_1 come variabili d'uscita.

Dalla seconda equazione si ricava:

$$w^2=K_v^2(P_1-P_{atm})$$
$$P_1=P_{atm}+\frac{w^2}{K_v^2}$$

sostituendo nella prima ed esplicitando le derivate e le uscite in funzione di stati e ingressi si trova:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{A}{L}\left(P_0-P_{atm}-\frac{w^2}{K_v^2}\right)$$
$$y_1=w$$
$$y_2=P_{atm}+\frac{w^2}{K_v^2}$$

2. Calcolare le condizioni di equilibrio del sistema.

Annullando le derivate si trova:

$$\bar{P}_1 = P_0$$
$$\bar{w} = \bar{K}_v \sqrt{P_0 - P_{atm}}$$

3. Scrivere le equazioni linearizzate del sistema attorno a tale condizione di equilibrio.

$$\frac{d\Delta w}{dt} = -\frac{2A\bar{w}}{L K_v^2}\Delta w + \frac{2A\bar{w}^2}{L\bar{K}_v^3}\Delta K_v$$
$$\Delta y_1 = \Delta w$$
$$\Delta y_2 = \frac{2\bar{w}}{K_v^2}\Delta w - \frac{2\bar{w}^2}{K_v^3}\Delta K_v$$

4. Calcolare la funzione di trasferimento tra le variazioni del coefficiente d'efflusso della valvola ΔK_v e le corrispondenti variazioni delle variazione delle variabili d'uscita Δw e ΔP_1, scrivendole in forma guadagno/costante di tempo.

Trasformando le equazioni linearizzate secondo Laplace e risolvendo rispetto alle uscite si trova:

$$\Delta w = \frac{\bar{w}}{\bar{K}_v}\frac{1}{1+s\tau}\Delta K_v$$
$$\Delta P_1 = -\frac{2\bar{w}^2}{\bar{K}_v^3}\frac{s\tau}{1+s\tau}\Delta K_v = -2\frac{(P_0 - P_{atm})}{\bar{K}_v}\frac{s\tau}{1+s\tau}\Delta K_v$$
$$\tau = \frac{L\bar{K}_v^2}{2A\bar{w}} = \frac{L\bar{w}}{2A(P_0 - P_{atm})}$$

5. Tracciare il grafico qualitativo delle corrispondenti risposte a scalino.

Si vedano le risposte canoniche dei sistemi del primo ordine con 1 polo e con 1 polo + 1 zero nell'origine.

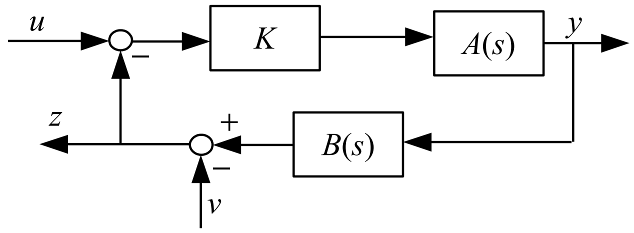
Si noti che lo zero nell'origine nella seconda f.d.t. fa sì che la variazione di P_1 a transitorio esaurito sia nulla; questo fatto si giustifica fisicamente considerando che le perdite di carico lungo la tubazione sono trascurate, quindi a regime la pressione P_1 è sempre pari a P_0 e di conseguenza la sua variazione è nulla.

Domanda 3

Calcolare le f.d.t tra gli ingresso e le uscite del seguente schema a blocchi:

$$A(s)=\frac{10}{s}$$

$$B(s)=\frac{2}{1+s}$$



$$Y(s)=\frac{KA(s)}{1+K\,A(s)B(s)}U(s)+\frac{KA(s)}{1+K\,A(s)B(s)}V(s)=\frac{10\mathrm{K}(1+s)}{s^2+s+20\mathrm{K}}U(s)+\frac{10\mathrm{K}(1+s)}{s^2+s+20\mathrm{K}}V(s)$$

$$Z(s)=\frac{KA(s)B(s)}{1+K\,A(s)B(s)}U(s)-\frac{1}{1+K\,A(s)B(s)}V(s)=\frac{20\mathrm{K}}{s^2+s+20\mathrm{K}}U(s)-\frac{s(1+s)}{s^2+s+20\mathrm{K}}V(s)$$

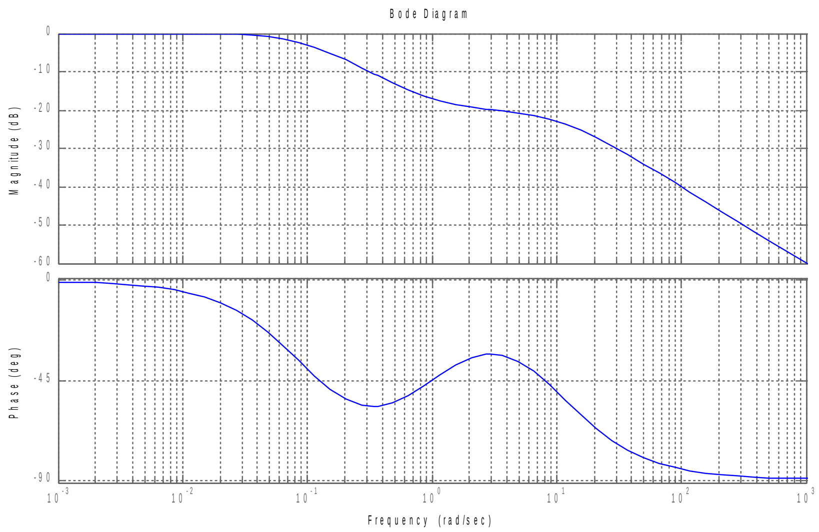
Valutare la stabilità del sistema al variare del parametro *K*.

Il sistema è asintoticamente stabile per $K > 0$, semplicemente stabile per $K = 0$, instabile per $K < 0$.

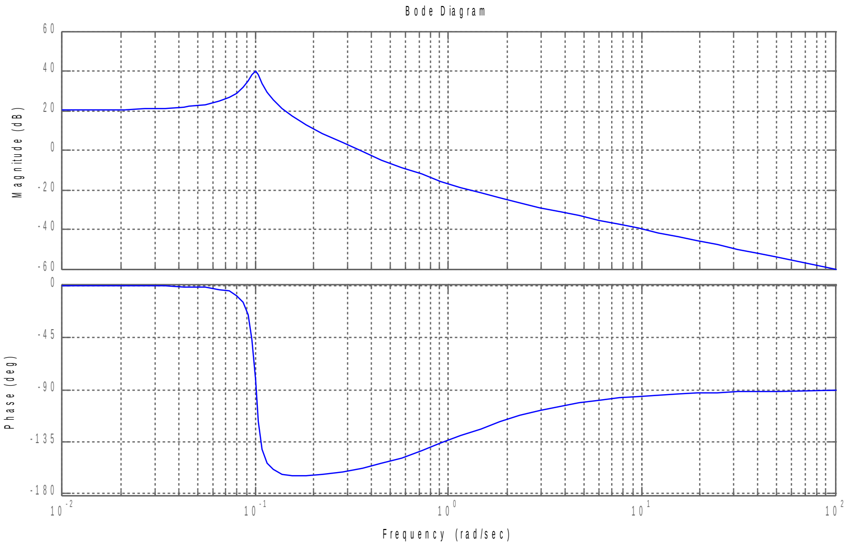
Domanda 4

Posto inizialmente $\tau = 1$, tracciare i diagrammi di Bode qualitativi del modulo e della fase della risposta in frequenza delle funzioni di trasferimento sottoelencate.

$$G_1(s)=\frac{1+\tau\, s}{(1+0.1\mathrm{s})(1+10\mathrm{s})}$$



$$G_2(s)=10\frac{1+\tau s}{1+s+100s^2}, \omega_n=0.1, \xi=0.05$$



Dire quindi, motivando la risposta, per quali valori del parametro τ la risposta in frequenza dei suddetti sistemi presenta un anticipo di fase in un opportuno intervallo di frequenze.

Facendo riferimento ai diagrammi asintotici della fase, il contributo dello zero introduce un anticipo di 90° a frequenze superiori a $1 / |\tau|$, a condizione che $\tau > 0$. Nel caso di $G_1(s)$, i poli introducono due ritardi di 90° a frequenze superiori a 10 e 0.1, rispettivamente; nel caso di $G_2(s)$, introducono un ritardo di 180° a frequenze superiori a 0.1. In entrambi i casi occorre quindi che $\tau > 1/0.1$, ossia che $\tau > 10$.

Il risultato così ottenuto è ovviamente approssimato. In particolare, nel caso di $G_2(s)$, il contributo di fase dello zero risulta già significativamente positivo per frequenze decisamente inferiori ad $1 / \tau$, mentre il contributo di fase dei poli complessi coniugati, che hanno uno smorzamento di solo 0.05, decresce molto rapidamente intorno a 0.1; per t di poco inferiore al valore limite di 10 trovato in precedenza, il diagramma reale della fase presenterà quindi ancora un anticipo significativo.

Il problema potrebbe essere risolto con esattezza per valori di τ prossimi al valore critico di 10, scrivendo l'espressione analitica della fase della risposta in frequenza, calcolandone la derivata ed imponendo che sia negativa (ossia che la fase sia sempre decrescente). La corrispondente disequazione va risolta numericamente, non essendo possibile calcolarne la soluzione in forma chiusa; la soluzione numerica (ad esempio tramite l'algoritmo di Newton-Raphson) può essere cercata utilizzando la soluzione approssimata trovata in precedenza come valore d'innesco dell'algoritmo iterativo.