Controlli Automatici

(Prof. Casella)

Prova in Itinere – 10 Maggio 2012

SOLUZIONE

Domanda 1.1

Definire con precisione la stabilità esterna dell'equilibrio di un generico sistema dinamico.

Dato un sistema dinamico con variabili di ingresso *u* e uscita *y,* sia $\bar{u}, \bar{y}$ un equilibrio del sistema. Si applichi ora una perturbazione impulsiva di ampiezza ε all'ingresso.

Se, per ogni $A > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, comunque preso $\|\varepsilon\| < \delta$ risulta $\|y(t)-\bar{y}\|< A$, allora l'equilibrio è stabile. Se inoltre $lim_{t\to\infty} y(t)=\bar{y}$, allora l'equilibrio è asintoticamente stabile. Negli altri casi, è instabile.

Domanda 1.2

Pronunciarsi sulla stablità dei seguenti sistemi lineari:

	As. stabile	Sempl. stabile	Instabile
$\frac{s-1}{s^2+10s+20}$	☒	❑	❑
$\frac{s}{s^2+1}$	❑	☒	❑
$\frac{s}{(s+1)^2}$	☒	❑	❑
$\frac{s}{(s^2+1)^2}$	❑	❑	☒
$\frac{5}{s^4-3s^3+2s-1}$	❑	❑	☒
$\frac{1}{s(s-1)}$	❑	❑	☒
$\frac{1}{s(s+1)}$	❑	☒	❑
$\frac{1}{s^2(s+1)}$	❑	❑	☒
$\frac{1}{s(s+1)^2}$	❑	☒	❑

Domanda 2

Si consideri un serbatoio pressurizzato di volume V contenente un gas, alimentato da un compressore che imprime una portata entrante w_i e con una valvola di scarico di portata w_u. Si assuma che il gas contenuto nel serbatoio compia una trasformazione politropica di indice k. Le equazioni che governano il sistema sono le seguenti:

$$\frac{dM}{dt}=w_i-w_u$$
$$M=\rho\, V$$
$$\frac{p}{\rho^k}=c$$
$$w_u=A_v\sqrt{\rho\, p}$$

dove M è la massa del gas contenuto nel serbatoio, ρ la sua densità, p la sua pressione, c una costante, A_v il coefficiente di efflusso della valvola di scarico.

2.1 Scrivere le equazioni del sistema in forma spazio di stato, considerando w_i e A_v come ingressi, w_u e p come uscite.

E' possibile scegliere come variabile di stato una variabile tra M, ρ e p. Scelta, ad esempio, ρ ed esplicitando derivate degli stati ed uscite rispetto a stati ed ingressi, risulta:

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{1}{V}\left(w_i-A_v\sqrt{c}\rho^{\frac{k+1}{2}}\right)$$
$$w_u=A_v\sqrt{c}\rho^{\frac{k+1}{2}}$$
$$p=c\rho^k$$

2.2 Calcolare le condizioni di equilibrio del sistema

$$\bar{w}_i=\bar{w}_u$$
$$\bar{w}_u=\bar{A}_v\sqrt{c}\bar{\rho}^{\frac{k+1}{2}}$$
$$\bar{p}=c\bar{\rho}^k$$

2.3 Scrivere le equazioni del sistema linearizzate attorno all'equilibrio

$$\frac{d\Delta\rho}{dt}=\frac{1}{V}\left(-\bar{A}_v\sqrt{c}\frac{k+1}{2}\bar{\rho}^{\frac{k-1}{2}}\Delta\rho+\Delta w_i-\Delta A_v\sqrt{c}\bar{\rho}^{\frac{k+1}{2}}\right)$$
$$\Delta w_u=\bar{A}_v\sqrt{c}\frac{k+1}{2}\bar{\rho}^{\frac{k-1}{2}}+\Delta A_v\sqrt{c}\bar{\rho}^{\frac{k+1}{2}}$$
$$\Delta p=ck\bar{\rho}^{k-1}\Delta\rho$$

Tenendo conto delle condizioni di equilibrio, si può anche riscrivere il sistema in questa forma più semplice

$$\frac{d\Delta\rho}{dt}=\frac{1}{V}\left(-\frac{k+1}{2}\frac{\bar{w}_i}{\bar{\rho}}\Delta\rho+\Delta w_i-\frac{\bar{w}_i}{\bar{A}_v}\Delta A_v\right)$$
$$\Delta w_u=\frac{k+1}{2}\frac{\bar{w}_i}{\bar{\rho}}\Delta\rho+\frac{\bar{w}_i}{\bar{A}_v}\Delta A_v$$
$$\Delta p=k\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\Delta\rho$$

2.4 Calcolare la funzione di trasferimento tra ΔA_v e Δw_u e tracciarne il diagramma qualitativo della risposta a scalino unitario

Posto

$$a=\bar{A}_v\sqrt{c}\,\frac{k+1}{2}\,\bar{\rho}^{\frac{k-1}{2}}=\frac{k+1}{2}\,\frac{\bar{w}_i}{\bar{\rho}}$$

$$b=\sqrt{c}\,\bar{\rho}^{\frac{k+1}{2}}$$

e considerando nullo l'ingresso Δw_i, le equazioni del sistema linearizzato e trasformato secondo Laplace sono:

$$s\Delta\rho=\frac{1}{V}\left(-a\Delta\rho-b\Delta A_v\right)$$

$$\Delta w_u=a\Delta\rho+b\Delta A_v$$

da cui si ricava

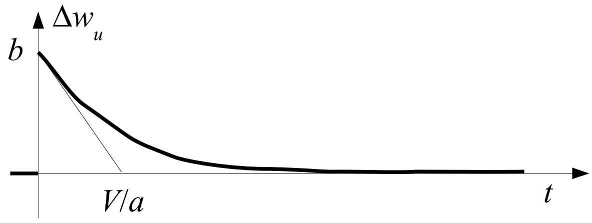
$$\Delta w_u=\frac{bs}{s+\frac{a}{V}}\Delta A_v$$

I valori iniziale e finale della risposta a scalino unitario e la costante di tempo valgono

$$y(0^+)=lim_{s\to\infty}G(s)=b$$

$$y(\infty)=lim_{s\to 0}G(s)=0$$

$$\tau=\frac{V}{a}$$



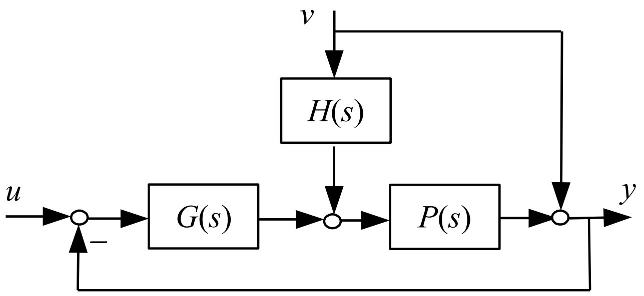
Lo zero nell'origine comporta un valore finale nullo della risposta a scalino dell'apertura della valvola ΔA_v. La giustificazione fisica sta nel fatto che, essendo costante w_i, per la conservazione della massa la portata uscente w_u a regime non può variare, quindi a regime dovrà necessariamente essere $\Delta w_u = 0$

2.5 Discutere come varia la risposta sopra calcolata al variare dell'indice k della trasformazione politropica

A parità di valori di portata d'ingresso e di densità all'equilibrio, la costante a cresce con k, quindi al crescere di k diminuisce la costante di tempo τ della risposta e la portata tende più rapidamente a tornare a regime.

Domanda 3

Calcolare le funzioni di trasferimento tra gli ingressi *u* e *v* e l'uscita *y* del seguente schema a blocchi e porle in forma guadagno-costanti di tempo



$$G(s)=10\frac{1+5s}{5s}$$

$$P(s)=\frac{2}{(1+5s)(1+10s)}$$

$$H(s)=\frac{1}{1+s}$$

$$Y(s)=F_u(s)U(s)+F_v(s)V(s)$$

$$F_u(s)=\frac{G(s)P(s)}{1+G(s)P(s)}=\frac{1}{1+0.25s+2.5s^2}=\frac{1}{1+\frac{2\xi}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2},\ \omega_n=0.6325, \xi=0.079$$

$$F_v(s)=\frac{1+H(s)P(s)}{1+G(s)P(s)}=\frac{3}{4}\frac{s(1+16/3s+65/3s^2+50/3s^3)}{\left(1+\frac{2\xi}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2\right)(1+s)(1+5s)}$$

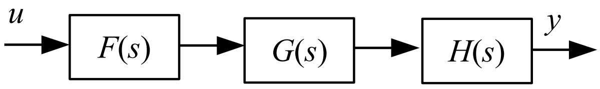
La f.d.t. $F_v(s)$ ha quattro zeri, uno nell'origine ed altri tre che potrebbero essere tutti reali, oppure uno reale ed una coppia di zeri complessi coniugati. Il calcolo dei tre zeri non nell'origine richiede la fattorizzazione del polinomio di terzo grado al numeratore.

Si noti come la funzione $F_u(s)$ coinvolga i due blocchi $G(s)$ e $P(s)$, rispettivamente del primo e del secondo ordine e quindi sia potenzialmente del terz'ordine. Tuttavia, la cancellazione polo/zero nel prodotto $G(s)P(s)$ porta ad un sistema del secondo ordine.

La funzione $F_v(s)$ invece coinvolge tutti e tre i blocchi $G(s)$, $P(s)$ e $H(s)$, di ordine uno, due ed uno, ed è quindi del quarto ordine, avendo quattro poli. In questo caso non ci sono cancellazioni polo/zero. Si noti come il polo di $H(s)$ compaia invariato nella funzione $F_v(s)$, in quanto non coinvolto nell'anello di retroazione, così come il polo di $P(s)$ radice del fattore (1+5s), che non è spostato dalla retroazione in quanto cancellato dal corrispondente zero nella funzione d'anello.

Domanda 4

Si consideri il seguente sistema:



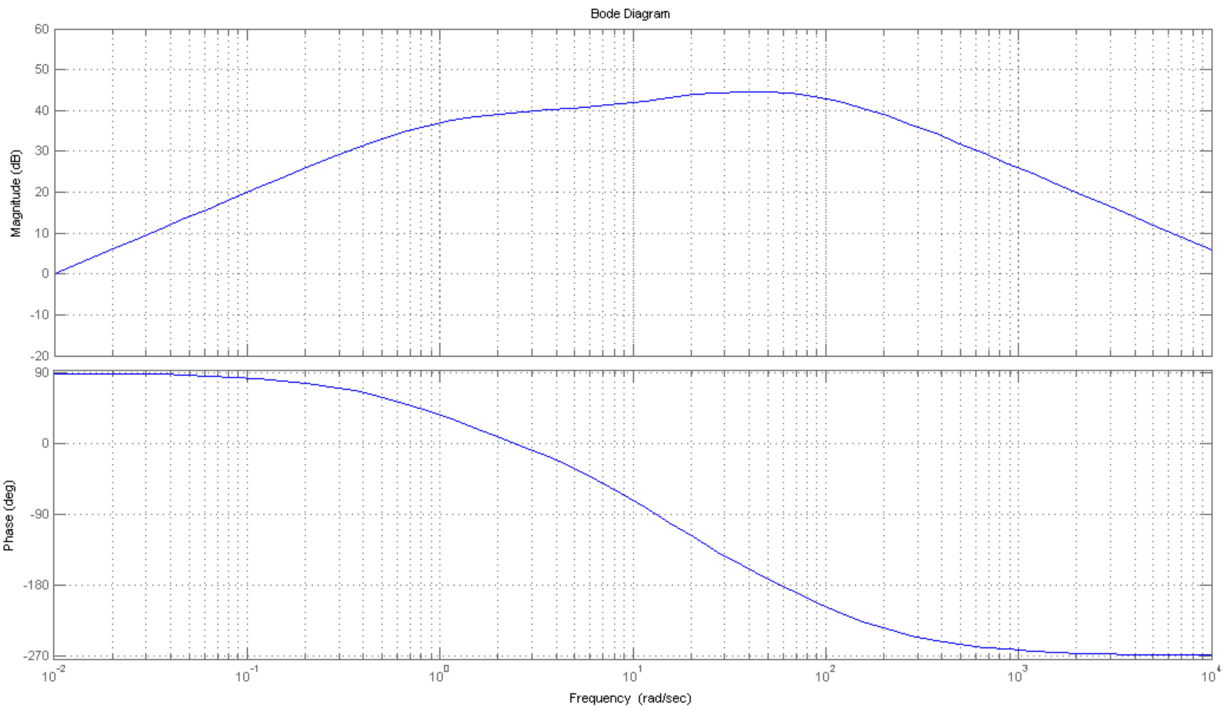
$$F(s) = 10\frac{10s}{1+s}$$

$$G(s) = 1$$

$$H(s) = \frac{1-0.1s}{(1+0.05s)(1+0.01s)}$$

4.1 Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase della risposta in frequenza del sistema complessivo, dall'ingresso *u* all'uscita *y*.

$$Y(s) = F(s)G(s)H(s) = \frac{100s(1-0.1s)}{(1+s)(1+0.05s)(1+0.01s)}$$



4.2 Scegliere la funzione di trasferimento G(s) in modo che segnali sinusoidali di frequenza angolare $5 < \omega < 50$ vengano tutti amplificati di un ugual fattore dal sistema complessivo.

Posto G(s) = 1, nell'intervallo di frequenze richiesto il diagramma del modulo della risposta in frequenza, che determina il fattore di amplificazione dei segnali sinusoidali, risulta crescente nell'intervallo $10 < \omega < 20$ a causa della coppia polo-zero $(1-0.1s)/(1+0.05s)$ contenuta in $H(s)$.

E' possibile compensare tale amplificazione introducendo una coppia polo-zero in G(s) che provochi un effetto uguale e contrario sul modulo della risposta in frequenza. Si noti che non è opportuno cancellare lo zero positivo con un polo positivo, visto che si creerebbe una cancellazione polo/zero instabile all'interno del sistema. La migliore scelta è quindi

$$G(s) = \frac{1+0.05s}{1+0.1s}$$