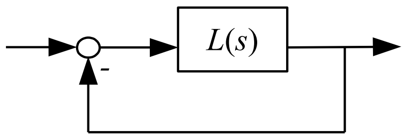
# Controlli Automatici

(Prof. Casella)

Prova in Itinere – 22 Giugno 2012

SOLUZIONI

**Domanda 1**



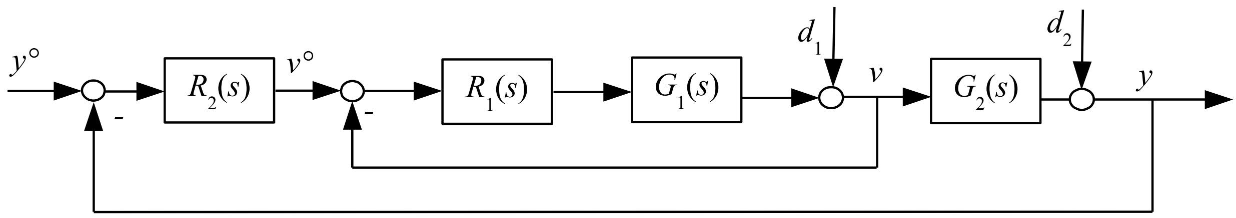

Con riferimento al sistema rappresentato in figura, enunciare con precisione il criterio di Bode per la stabilità ad anello chiuso.

Si supponga che la funzione $L(s)$ abbia poli con parte reale negativa o nulla e guadagno $\mu_L$ e che esista un solo valore di pulsazione critica $\omega_c$ tale che $|L(j\omega_c)| = 1$. Si definisca lo sfasamento critico come $\varphi_c = \angle\ L(j\omega_c)$ e il margine di fase come $\varphi_m = 180° - |\varphi_c|$.

Sotto queste ipotesi, condizione necessaria e sufficiente per la stabilità del sistema ad anello chiuso è che $\mu_L > 0$ e $\varphi_m > 0$.

**Domanda 2**

Disegnare lo schema a blocchi dello schema di controllo in cascata, delineare i criteri di taratura dei regolatori e spiegare quali sono i vantaggi ed i costi di tale schema rispetto ad uno schema standard di controllo a retroazione dell'errore.




Il sistema da controllare è caratterizzato da due dinamiche $G_1$(s) e $G_2$(s), tali per cui la prima permette più facilmente della seconda di chiudere un anello di retroazione con banda elevata.

Il regolatore interno $R_1$(s) viene tarato in modo che l'anello interno, che ha come funzione d'anello $R_1$(s)$G_1$(s), abbia una banda elevata; in tal modo il disturbo $d_1$ viene rigettato efficacemente. Il regolatore esterno $R_2$(s) viene tarato con una banda più contenuta. All'interno di questa banda, funzione di trasferimento tra $v°$ e $v$ è circa unitaria, permettendo di approssimare la funzione d'anello esterna come $R_2$(s)$G_2$(s) ai fini della taratura di $R_2$(s).

I vantaggi di questo schema rispetto ad una semplice retroazione di *y,* che sarebbe vincolata da $G_2$(s) ad avere una banda contenuta, sono la migliore reiezione possibile per il disturbo $d_1$ e la maggiore insensibilità delle prestazioni della regolazione di *y* all'eventuale incertezza su $G_1$(s).

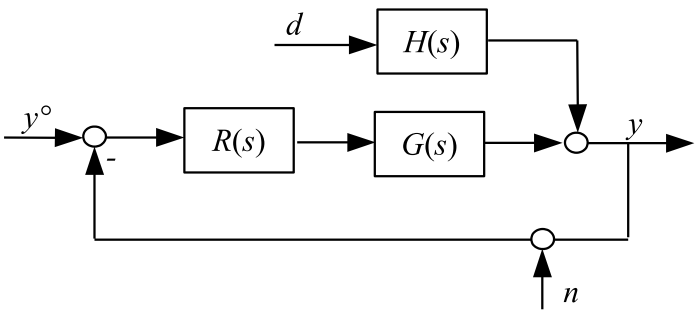
**Domanda 3**

Si consideri il seguente sistema di controllo (l'unità di misura delle costanti di tempo è il secondo):

$$R(s)=2\frac{1+20s}{20s}$$

$$G(s)=\frac{0.1}{s(1+2s)^2}$$

$$H(s)=\frac{2}{s^2}$$




**3.1** Calcolare l'errore a transitorio esaurito a fronte di variazioni a scalino unitarie del riferimento *y*° e del disturbo *d*.

Applicando il teorema del valore finale (valido nell'ipotesi che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile) si trova:

$$e_{\infty y^\circ}=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\frac{1}{1+R(s)G(s)}=0$$

$$e_{\infty d}=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\frac{-H(s)}{1+R(s)G(s)}=-200$$

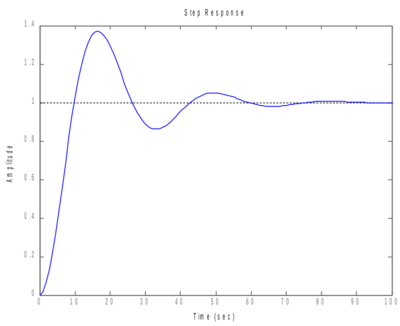
**3.2** Calcolare la pulsazione critica ed il margine di fase del sistema di controllo. Tracciare quindi un diagramma qualitativo della risposta della variabile controllata *y* ad uno scalino unitario applicato al riferimento *y*°.

$$L(s)=R(s)G(s)=0.2\frac{1+20s}{20s}\frac{1}{s}\frac{1}{(1+2s)^2}$$

A frequenze superiori a 0.05 rad/s ed inferiori a 0.5 rad/s, il diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza di $L(s)$ può essere approssimato con quello di 0.2/s, che ha $\omega_c = 0.2$. Lo sfasamento critico vale $\varphi_c = -90 - 90 + \text{atan}(0.2\times 20) - 2\text{atan}(0.2\times 2) = -148°$, quindi il margine di fase vale $\varphi_m = 180° - 148° = 32°$.

La risposta a scalino si può approssimare con quella di una f.d.t. con guadagno unitario e con una coppia di poli complessi con pulsazione naturale $\omega_n \approx \omega_c = 0.2$ e smorzamento $\xi_n \approx \varphi_m/100° = 0.3$.

Il tempo di assestamento è quindi pari a circa $5/\xi\omega_n = 85$, lo pseudo-periodo delle oscillazioni è pari a circa $2\pi/\omega_n = 30$ secondi.



**3.3** Valutare l'ampiezza asintotica delle oscillazioni della variabile controllata $y$ a fronte di un andamento sinusoidale del disturbo in retroazione $n$ con ampiezza unitaria e periodo pari a 0.3 unità di tempo.

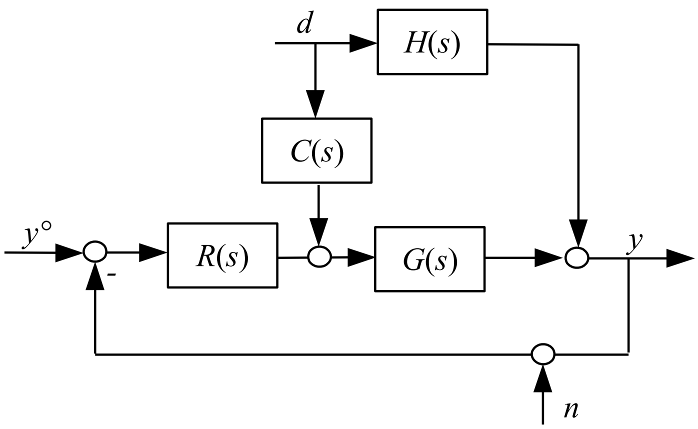
La frequenza angolare del disturbo è pari a $2\pi/T = 21$ rad/s. L'ampiezza della variabile controllata sarà data dall'ampiezza del disturbo (pari ad 1) moltiplicata per il modulo della funzione di trasferimento tra n ed y, pari a $-L(s)/(1+L(s))$ . Attorno a 21 rad/s, il diagramma del modulo di tale funzione è approssimabile con quello della funzione L(s), a sua volta approssimabile come

$$2\frac{20s}{20s}\frac{0.1}{s(2s)^2}=\frac{0.05}{s^3}$$

Il modulo (e quindi l'ampiezza delle oscillazioni di $y$) vale:

$$\left|\frac{0.05}{j\,21^3}\right|=5.4\cdot10^{-6}$$

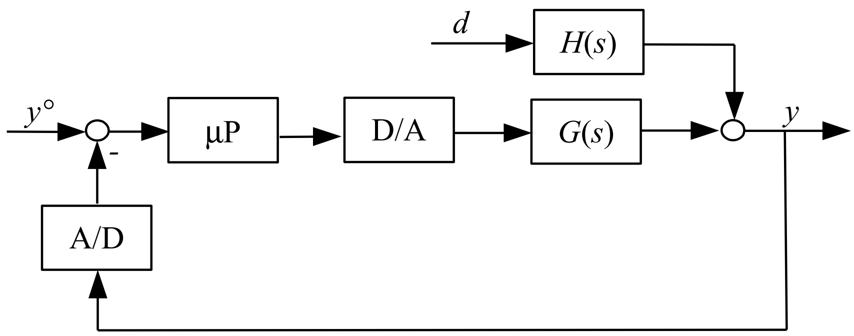
**3.4** Disegnare lo schema a blocchi del sistema di controllo inclusivo di compensazione diretta del disturbo $d$. Progettare quindi un compensatore del disturbo efficace fino a frequenze di 5 rad/s.




$$C(s)=-\frac{H(s)}{G(s)}=-20\frac{(1+2s)^2}{s}$$

$$C^*(s)=-20\frac{(1+2s)^2}{s(1+0.2s)}$$

**3.5** Si supponga ora di realizzare il sistema di controllo con tecnologia digitale. Disegnare lo schema a blocchi del regolatore. Assumendo quindi che il tempo di elaborazione del segnale di controllo sia pari al periodo di campionamento $T_c$, scegliere $T_c$ in modo che la riduzione di margine di fase non superi i 5°.




Si suppone che il set point sia già disponibile in forma digitale. Il blocco A/D è un campionatore sincrono, il blocco D/A un mantenitore, il blocco mP rappresenta il microprocessore che calcola la variabile di controllo in modo da approssimare la dinamica del regolatore PI.

La riduzione di margine di fase dovuta al ritardo intrinseco di campionamento e al ritardo di elaborazione vale:

$$\Delta\phi_m = \frac{180°}{\pi}\,\omega_c\left(\frac{T_c}{2}+T_c\right)=5°$$

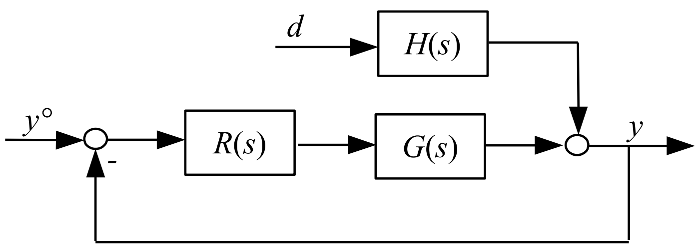
da cui si ricava un Tc massimo di 0.29 secondi.

**Domanda 4**

Si consideri il seguente sistema di controllo (l'unità di misura delle costanti di tempo è il secondo):

$$G(s)=50\frac{e^{-4s}}{(1+10s)(1+3s)}$$

$$H(s)=\frac{5}{1+100s}$$




**4.1** Progettare un regolatore di tipo PI (o PID, se necessario) con una banda di 0.1 rad/s ed un margine di fase di almeno 60°.

Ipotizzando di utilizzare un regolatore PI, si può cancellare il polo dominante del sistema con lo zero del regolatore ponendo $T_i$ = 10, ottenendo una funzione d'anello

$$L(s)=R(s)G(s)=K_p\frac{1+10s}{10s}50\frac{e^{-4s}}{(1+10s)(1+3s)}=5K_p\frac{e^{-4s}}{s(1+3s)}$$

Posto $K_p$ = 1/50, si ottiene la pulsazione critica desiderata. Il margine di fase corrispondente vale

$$\phi_m=180°-|\phi_c|=180°+\phi_c=180°-90-atan(3\cdot 0.1)-\frac{180°}{\pi}4\cdot 0.1=50°$$

che non è sufficiente.

Si può riportare il margine di fase sopra ai 60° prendendo un tempo integrale $T_i > 14$; in questo caso, però, il diagramma di Bode asintotico del modulo risulta male approssimato attorno alla pulsazione critica, a causa della presenza del polo con costante di tempo 10 non più cancellato dallo zero del regolatore. Occorre quindi calcolare con precisione il modulo della funzione d'anello alla pulsazione critica, ottenendo un valore di $K_p$ superiore a quello ottenuto in precedenza.

In alternativa, è possibile lasciare $T_i = 10$ e introdurre una azione derivativa per compensare lo sfasamento del polo con costante di tempo 3 secondi. Scegliendo ad esempio Td = 3 ed N = 3 si ottiene

$$R(s)=K_p\left(1+\frac{1}{sT_i}+\frac{sT_d}{1+sT_d/N}\right)\approx K_p\frac{(1+sT_i)(1+sT_d)}{sT_i(1+sT_d/N)}=0.02\frac{(1+10s)(1+3s)}{10s(1+s)}$$

e di conseguenza un margine di fase pari a

$$\phi_m=180°-|\phi_c|=180°+\phi_c=180°-90-atan(1\cdot 0.1)-\frac{180°}{\pi}4\cdot 0.1=61°$$

**4.2** Si supponga ora che il guadagno di $G(s)$ sia incerto e possa assumere valori compresi tra 50 e 200. Progettare un regolatore di tipo PI (o PID, se necessario) che garantisca una banda di almeno 0.015 rad/s e l'assenza di oscillazioni significative nella risposta a scalino del riferimento in tutti i casi.

Rispetto alla specifica sulla banda, il caso più sfavorevole è quello col guadagno minimo, cioe' 50. Un regolatore PI con $T_i = 10$ e $K_p = 0.003$ ha una banda di 0.015 rad/s ed un margine di fase pari a

$$\phi_m=180°-|\phi_c|=180°+\phi_c=180°-90-atan(3\cdot 0.015)-\frac{180°}{\pi}4\cdot 0.015=84°$$

Il diagramma del modulo attraversa l'asse 0dB con una pendenza di 20 db/dec per un intervallo di ampiezza considerevole; in tale intervallo, la banda risulta quindi proporzionale al guadagno di $G(s)$. Nell'ipotesi che ora il guadagno di tale funzione si porti all'altro estremo dell'intervallo, pari a 200, la banda si quadruplica portandosi a 0.06 ed il margine di fase si riduce a:

$$\phi_m=180°-|\phi_c|=180°+\phi_c=180°-90-atan(3\cdot 0.06)-\frac{180°}{\pi}4\cdot 0.06=66°$$

Il regolatore sopra trovato porterà quindi in generale ad una banda maggiore o uguale a 0.015 e ad un margine di fase maggiore o uguale a 66°, soddisfando quindi le specifiche in tutto l'intervallo possibile di valori del guadagno di $G(s)$.