

Capitolo 1

Equazioni di conservazione

In questo capitolo si procederà alla stesura delle equazioni di conservazione in forma generale; per fare ciò è necessario suddividere i componenti di un sistema in classi differenti cui associare diversi tipi di modello.

1.1 Classi di componenti

Dal punto di vista della modellistica, i componenti di un processo possono essere suddivisi principalmente in tre classi:

- **Elementi privi di accumulo**
- **Elementi dotati di accumulo**
- **Elementi "lunghi"**

A titolo di esempio, si può far riferimento ad un sistema composto da uno scaldabagno domestico del tipo elettrico ad accumulo, collegato tramite una tubazione di lunghezza significativa ad una valvola d'utenza (rubinetto).

Elementi privi di accumulo: sono elementi che, date le piccole dimensioni, hanno una dinamica molto rapida, che può essere trascurata; possono dunque essere descritti da relazioni algebriche tra le variabili. E' questo il caso delle valvole, il cui volume di fluido risulta del tutto trascurabile ai fini delle dinamiche dominanti del processo.

Elementi dotati di accumulo: diversamente dal caso precedente, sono elementi caratterizzati da un accumulo significativo di massa, quantità di moto ed energia, e che quindi manifestano dinamiche temporali non trascurabili; tuttavia le grandezze legate all'accumulo non hanno una distribuzione spaziale significativa e possono essere considerate come uniformi. Le relazioni che intercorrono tra le variabili sono quindi descritte da equazioni differenziali ordinarie e da equazioni algebriche (DAE), in cui compaiono solo derivate temporali. Questi modelli sono spesso definiti *a parametri concentrati*. Nell'esempio sopra menzionato, questo è il caso dello scaldabagno ad accumulo, i cui fenomeni convettivi all'interno del volume di accumulo

garantiscono un buon mescolamento dell'acqua calda, che ha quindi sostanzialmente una sola temperatura uniforme.

Elementi "lunghi": questi elementi, oltre ad avere dinamiche non trascurabili, sono caratterizzati da distribuzioni spaziali significative e da fenomeni di trasporto; per descriverli sono dunque necessarie delle equazioni differenziali alle derivate parziali, oltre che equazioni algebriche (PDAE). Si parla in questo caso di modelli *a parametri distribuiti*.

Per descrivere un componente si possono utilizzare modelli algebrici, modelli a parametri concentrati (DAE) e modelli a parametri distribuiti (PDAE). L'appartenenza del modello di un componente ad una delle classi sopra descritte non è ovviamente strutturale, ma è una scelta modellistica, che viene fatta a seconda del grado di approssimazione richiesto per lo sviluppo del controllo. Infatti, ogni singolo componente potrebbe essere descritto in tutte e tre le maniere appena viste, a seconda delle scale dei tempi significative per l'applicazione di controllo. Occorre dunque sviluppare un occhio critico per valutare quale sia il modello più appropriato, caso per caso.

1.2 Modelli a Parametri Distribuiti: 1D

Si consideri il volume tubiforme di fig. 1.1:

- Sia data una linea s , con ascissa curvilinea x
- Assegnata la sezione normale S , di diametro d per ogni punto di s , che ne sia il baricentro, di area $A(x,t)$
- Il volume V è l'involuppo delle sezioni S lungo s

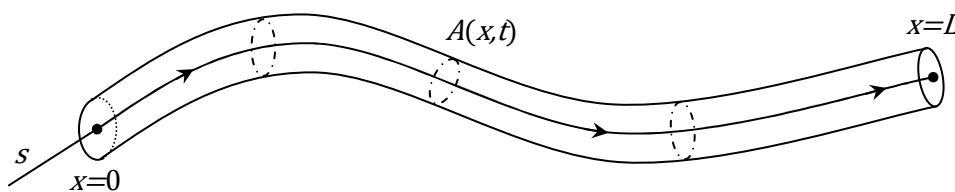


Figura 1.1: Volume tubiforme

Inoltre valgono le seguenti ipotesi:

- Consideriamo tubi "sottili": $L \gg d$
- Consideriamo tubi "regolari": grandi raggi di curvatura ($r_{curv} \gg d$) e variazioni graduali della sezione ($\theta_v < 5^\circ$ in allargamento e $\theta_v < 45^\circ$ in strozzatura- vedi fig. 1.2)
- Consideriamo che il moto di fluido interno al volume sia di tipo turbolento, in modo che la distribuzione della velocità e delle proprietà termodinamiche su ogni sezione sia essenzialmente uniforme, salvo che su uno strato limite sottile.

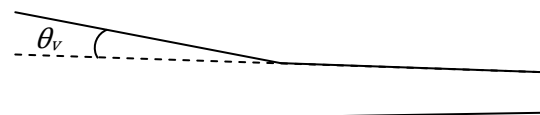


Figura 1.2 Variazione della sezione

Richiami sul moto turbolento:

L'ipotesi di considerare il moto di fluido come turbolento è valida negli impianti che trattano acqua, gas e vapori, eccezion fatta per le primissime fasi di avviamento dell'impianto ed

eventualmente nel caso di inversioni di portata; la distribuzione radiale di velocità per un moto laminare e uno turbolento è rappresentata in figura 1.3.

La condizione di turbolenza del moto è legata al numero di Reynolds, il quale risulta definito nel modo seguente:

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu}$$

dove:

- ρ è la densità del fluido
- u è la velocità del fluido
- D è il diametro, ovvero la *dimensione tipica* del volume tubiforme
- μ è il coefficiente di attrito viscoso

Laddove Re è piccolo dominano i fenomeni di attrito e dunque abbiamo un moto laminare; al contrario, per Re grande (maggiore di qualche migliaio) nella direzione di moto si creano dei vortici tali per cui i fenomeni di attrito risultano trascurabili e la velocità del fluido è uniforme all'interno della sezione ossia:

$$u = u(x, t, \cancel{r}) = u(x, t)$$

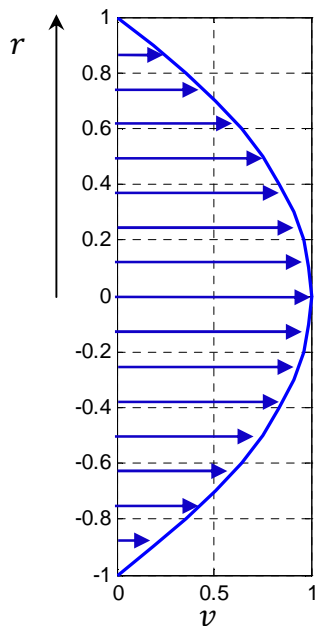


Figura 1.3a: moto laminare

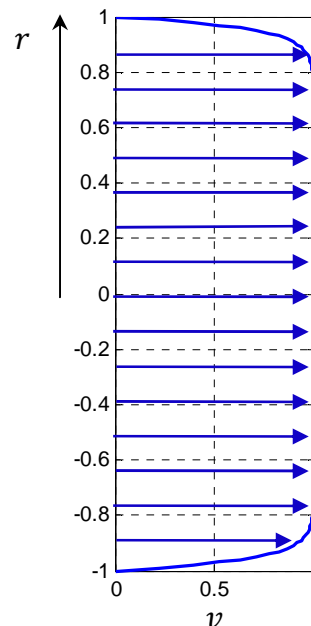


Figura 1.3b: moto turbolento

Nel caso di moto laminare, dove domina l'attrito tra strati di fluido adiacenti, si dimostra che la distribuzione di velocità è parabolica, almeno nel caso di fluidi Newtoniani. Nel caso di moto turbolento, si verifica sperimentalmente che distribuzione può essere approssimata, nella zona adiacente le pareti, dalla funzione:

$$u(\xi) \propto \xi^a$$

dove ξ è la distanza dalla parete del tubo si può scrivere, ed $a = 1/7$.

Se si rappresenta in un grafico la curva $u(\xi) = \xi^{\frac{1}{7}}$ si nota immediatamente che il profilo cresce in modo molto rapido, permettendo di assumere una distribuzione radiale sostanzialmente uniforme

della velocità, il che a sua volta permette di trattare il problema come monodimensionale, considerando solo la coordinata curvilinea x .

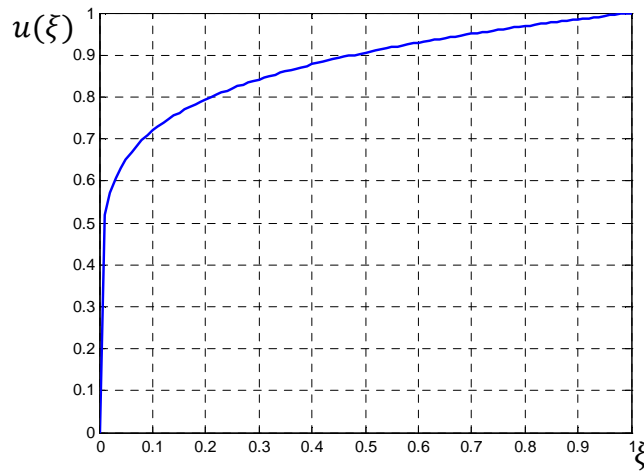


Figura 1.3c: rappresentazione della curva $u(\xi) = \xi^{\frac{1}{7}}$

1.2.1 Equazione generale di conservazione

Le equazioni fondamentali per descrivere il processo sono equazioni di bilancio di massa, di quantità di moto e di energia.

Le equazioni si risolvono scrivendo i bilanci su un volumetto di fluido di lunghezza Δx e facendo poi tendere Δx a zero (figura 1.4); si procede ora a scrivere la forma generale dell'equazione di conservazione di una grandezza G che verrà successivamente applicata alla massa, alla quantità di moto e all'energia:

$$\Phi_A(x, t) - \Phi_A(x + \Delta x, t) + \Phi_s(x, \Delta x, t) + F_v(x, \Delta x, t) = \frac{\partial G(x, \Delta x, t)}{\partial t} \quad (1.2)$$

Dove:

- $\Phi_A(x, t)$ e $\Phi_A(x + \Delta x, t)$ sono i flussi di G attraverso le superfici normali di ascissa x e $x + \Delta x$ rispettivamente
- $\Phi_s(x, \Delta x, t)$ è il flusso di G attraverso la superficie laterale del tubo
- $F_v(x, \Delta x, t)$ è il termine di generazione della quantità G all'interno del volumetto considerato
- $\frac{\partial G(x, \Delta x, t)}{\partial t}$ è la variazione nel tempo della quantità G accumulata nel volumetto considerato

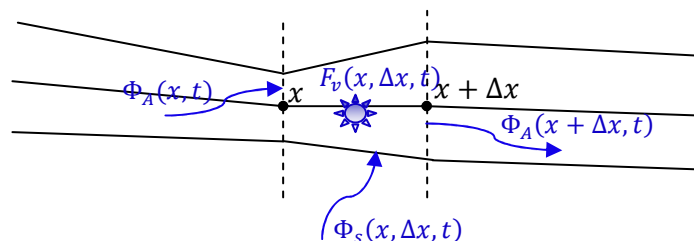


Figura1.4: Volumetto di fluido considerato

1.2.2 Equazione di conservazione della massa

Se vogliamo trovare l'equazione di conservazione della massa applicando quella generale scritta al punto precedente, occorre definire la funzione G come massa del volumetto; il flusso attraverso le superfici normali non è altro che la portata massica di fluido; chiaramente non ci sarà ne flusso di massa attraverso la superficie laterale (il tubo è impermeabile), ne generazione di massa all'interno del volumetto considerato; ricapitolando:

- $G(x, \Delta x, t) = \rho(x, t)A(x, t)\Delta x$
- $\Phi_A(x, t) = w(x, t) = \rho(x, t)A(x, t)u(x, t)$
- $\Phi_s(x, \Delta x, t) = 0$
- $F_v(x, \Delta x, t) = 0$

Sostituendo nell'equazione generale di conservazione resta:

$$w(x, t) - w(x + \Delta x, t) + 0 + 0 = \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t)A(x, t)\Delta x$$

Dividendo per Δx e calcolandone il $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ si ottiene:

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{1.3}$$

dove:

- $\rho(x, t)$ è la densità del fluido
- $A(x, t)$ l'area della sezione
- $w(x, t)$ la portata massica fluente

1.2.3 Equazione di conservazione della quantità di moto

Essendo la quantità di moto una grandezza vettoriale, si possono scrivere tre equazioni di conservazione: una lungo la direzione tangenziale, una in direzione normale e una lungo la binormale; tuttavia, se non interessano le forze applicate dalla parete sul fluido in direzione normale alla linea s , (che servono a calcolare le reazioni vincolari dei supporti del tubo) ci si può concentrare sulla componente tangenziale ad s , che sarà individuata dal versore \vec{i} .

In questo caso la grandezza G sarà dunque la quantità di moto in direzione \vec{i} , i flussi lungo le superfici normali sono le quantità di moto associate alla portata rispettivamente entrante e uscente dal volumetto considerato; anche in questo caso il tubo è impermeabile ($\Phi_s(x, \Delta x, t) = 0$); tuttavia esistono delle componenti che generano quantità di moto all'interno del volumetto quali forza peso, la forza di pressione delle pareti laterali e la forza di attrito sulle pareti laterali, tutte valutate in direzione \vec{i} , naturalmente.

A conti fatti (vedi dispense) l'equazione di conservazione della quantità di moto risulta essere:

$$\frac{\partial \rho A u}{\partial t} + \frac{\partial \rho A u^2}{\partial x} + A \frac{\partial P}{\partial x} + \rho A g \frac{dz}{dx} + \frac{C_f}{2} \rho \omega |u|u = 0 \tag{1.4}$$

Dove:

- P è la pressione
- u è la velocità del fluido
- g è l'accelerazione di gravità
- z è la quota baricentrica
- C_f è il coefficiente di attrito di Fanning
- ω è il perimetro bagnato del tubo

Analizzando il risultato ottenuto si osserva che

- I primi due termini $\frac{\partial \rho Au}{\partial t} + \frac{\partial \rho Au^2}{\partial x}$ sono analoghi ai due termini presenti nell'equazione di conservazione della massa
- $A \frac{\partial P}{\partial x}$ è il termine di quantità di moto generata dovuto alla variazione di pressione lungo l'ascissa curvilinea del tubo
- $\rho Ag \frac{dz}{dx}$ è il termine di quantità di moto generata dalla forza peso ed è dovuto al dislivello compiuto dal baricentro del fluido all'interno del tubo
- $\frac{C_f}{2} \rho \omega |u|u$ è il termine di attrito, rivolto sempre in direzione opposta al moto

Reminiscenze sul coefficiente di Fanning:

Il coefficiente di Fanning può essere valutato tramite l'equazione di Colebrook, ovvero consultando il diagramma di Moody:

$$C_f = f\left(Re, \frac{\epsilon}{D}\right)$$

Dove $\frac{\epsilon}{D}$ è la rugosità relativa del condotto e Re è il numero di Reynolds; i valori tipici del coefficiente di Fanning sono compresi tra 0.0025÷0.01 (si può assumere come valore ragionevole 0.005)

Il diagramma di Moody è spesso rappresentato diagrammando il coefficiente di attrito di Darcy-Weisbach e C_d , che vale

$$C_d = 4C_f$$

E' possibile distinguere quale coefficiente sia rappresentato osservando la linea retta sulla sinistra, che corrisponde al moto laminare: il coefficiente di Fanning vale $16/Re$, mentre quello di Darcy $64/Re$. In figura 1.5 è rappresentato il coefficiente di Darcy.

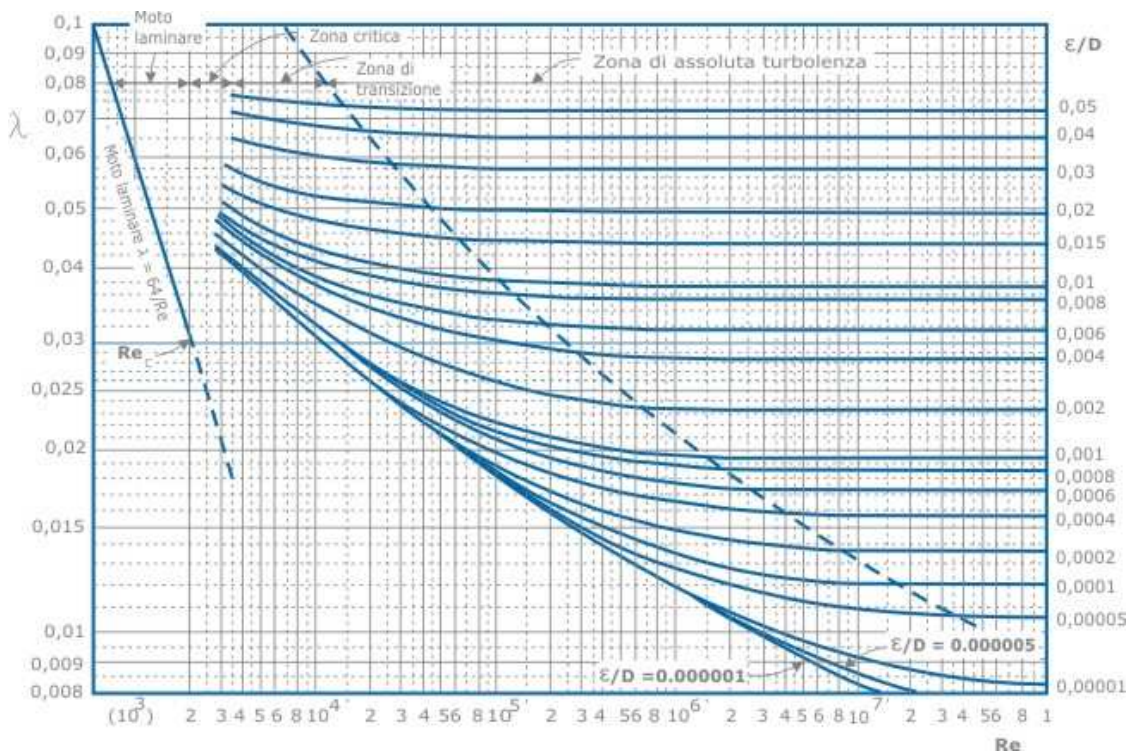


Figura 1.5: Diagramma o "Abaco" di Moody

1.2.4 Equazione di conservazione dell'energia

In questo caso la funzione G sarà l'energia totale del volumetto di fluido considerato; consideriamo in questo caso l'energia interna e l'energia meccanica (cinetica e potenziale gravitazionale). Assumiamo per semplicità che all'interno del volume non avvengano reazioni chimiche.

Dunque si può scrivere:

$$G(x, \Delta x, t) = \rho(x, t)A(x, t)\Delta x \left[e(x, t) + \frac{u^2(x, t)}{2} + gz(x) \right] \quad (1.5)$$

dove:

- $e(x, t)$ è l'energia interna specifica alla massa
- $\frac{u^2(x, t)}{2}$ è l'energia cinetica specifica alla massa
- $gz(x)$ è l'energia potenziale gravitazionale specifica alla massa

Gli altri termini presenti nell'equazione dell'energia risultano:

$$\begin{aligned} \Phi_A(x, t) &= E_w + \hat{\Phi}_T + L_p \\ \Phi_S(x, t) &= \tilde{\Phi}_T \\ E_v &= 0 \end{aligned}$$

Dove:

- E_w è l'energia associata alla portata
- $\hat{\Phi}_T$ è il flusso termico in direzione assiale dovuto alla diffusione: si veda l'equazione di Fourier ($\varphi = -\lambda \frac{dT}{dx}$)
- L_p è il lavoro meccanico sviluppato dalle forze di pressione sulla sezione S
- $\tilde{\Phi}_T$ è il flusso termico attraverso le pareti laterali del tubo

L'equazione dell'energia, a conti fatti (vedi dispense) risulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho A \left(e + \frac{u^2}{2} + gz \right) + \frac{\partial}{\partial x} w \left(h + \frac{u^2}{2} + gz \right) = \omega \varphi + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1.6)$$

Dove:

- $h = e + \frac{P}{\rho}$ è l'entalpia (specifica alla massa) del liquido
- $\frac{P}{\rho}$ è il lavoro delle forze di pressione
- $\varphi = \varphi(x, t)$ è il flusso termico per unità di superficie attraverso la superficie laterale, espresso in $\left[\frac{W}{m^2} \right]$
- $\omega = \omega(x)$ è il perimetro bagnato
- λ è la conducibilità termica del liquido, espressa in $\left[\frac{W}{mK} \right]$

Si procederà ora a semplificare l'equazione appena trovata individuandone i termini trascurabili.

Termine di diffusione:

Se si esclude il caso dei metalli liquidi a bassa portata, il trasporto di calore per conduzione è sempre dominato dal termine di trasporto di portata, salvo che per portate nulle o molto prossime a zero, e può quindi essere trascurato:

$$\frac{\partial wh}{\partial x} \gg \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

Questo termine diviene importante, ad esempio, nei casi di scambiatore a sodio/piombo liquido (per impianti nucleari), soprattutto in fase di avviamento o di arresto d'emergenza ($w \sim 0$).

Fenomeni termici dominanti:

- Se il processo non coinvolge significativi scambi termici (ad esempio in processi idraulici), la conservazione dell'energia meccanica è equivalente alla conservazione della quantità di moto, e quindi ridondante.
- Viceversa, scambi termici che provochino variazioni di temperatura anche di pochi gradi, risultano dominanti rispetto alle energie potenziali e cinetiche, che possono quindi essere trascurate; ad esempio, per una variazione di temperatura di 1°C di acqua, la variazione di energia interna del fluido è di 4200 J/Kg ; mentre a una variazione di velocità da 0 a 10 m/s corrisponde una variazione di energia cinetica di soli 50 J/Kg .

In quest'ultimo caso, si possono trascurare i termini meccanici, semplificando quindi ulteriormente l'equazione dell'energia:

$$\frac{\partial \rho A e}{\partial t} + \frac{\partial wh}{\partial x} = \omega \varphi \tag{1.7}$$

1.2.5 Equazione in forma entropica

Qualora non si vogliano trascurare i termini meccanici, ma si voglia scrivere un'equazione che metta in evidenza i soli fenomeni termici, è possibile sottrarre all'equazione dell'energia (1.6) l'equazione della quantità di moto moltiplicata per la velocità u , che contiene quindi un bilancio di potenze meccaniche. A valle di opportuni passaggi che coinvolgono anche l'equazione della massa, trascurando il termine diffusivo, si ottiene la seguente forma (vedi dispensa, appendice 1):

$$\rho A T \frac{\partial S}{\partial t} + w T \frac{\partial S}{\partial x} = \omega \varphi + \frac{C_f}{2} \rho \omega |u| u^2 \tag{1.8}$$

Che è detta anche *equazione in forma entropica*, in quanto scorpora i termini meccanici reversibili dall'equazione dell'energia. S è l'entropia specifica del fluido.

Si noti che il termine $\frac{C_f}{2} \rho \omega |u| u^2$, pur essendo concettualmente essenziale, perché rappresenta la generazione di entropia dovuta ai fenomeni d'attrito irreversibili, è quantitativamente trascurabile in presenza di flussi termici anche modesti, e quindi viene di solito trascurato.

1.3 Modelli a Parametri Concentrati

Per modellizzare sistemi a parametri concentrati si possono impiegare le equazioni di bilancio in forma integrale sull'intero volume del sistema, valide in generale. Se le grandezze specifiche sono uniformi nel volume, esse possono essere portate fuori dal segno di integrale, semplificando le equazioni ottenute.

1.3.1 Equazione generale di conservazione

Come nel caso di modelli a parametri distribuiti (paragrafo 1.2.1) si può scrivere un'equazione generale di bilancio, considerando stavolta un volume di controllo *aperto* e *diabatico* (fig. 1.6).

Si può dunque scrivere:

$$\frac{d}{dt} \int_V G(x, y, z, t) dV = \sum_j \Phi_{w_j} + \Phi_s + F_v \tag{1.9}$$

Dove, analogamente a quanto visto in precedenza:

- $G(x, y, z, t)$ è la quantità generica di cui scrivere il bilancio, per unità di volume
- Φ_{w_j} è il flusso della suddetta quantità associato alla portata w_j , positivo se entrante
- Φ_s è il flusso della quantità attraverso la superficie S
- F_v rappresenta i termini di generazione interni al volume di controllo

Si assume che la massa possa entrare ed uscire dal volume solo attraverso le portate w_j .

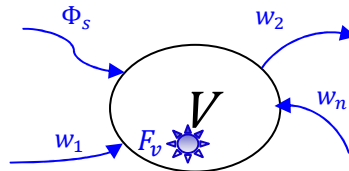


Figura 1.6: Volume “concentrato” di controllo

1.3.2 Equazione di conservazione della massa

Nel caso di sistemi a parametri concentrati la funzione G va scritta, come appena puntualizzato, per unità di volume; nel caso in esame dunque G sarà proprio la massa per unità di volume, ossia la densità; considerando che non ci sia flusso di massa attraverso la superficie S né ci sia generazione di massa all’interno del volume di controllo si può scrivere:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \sum_j w_j \quad (1.10)$$

Se poi la densità è uniforme sul volume, è possibile portarla fuori dal segno di integrale ottenendo:

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = \sum_j w_j \\ M(t) = \rho(t)V(t) \end{cases} \quad (1.11)$$

Si noti che la prima delle due equazioni del sistema vale anche se le proprietà termodinamiche non sono uniformi in V . Diventa però particolarmente utile qualora valga anche la seconda.

1.3.3 Equazione di conservazione della quantità di moto

Analogamente a quanto detto nel paragrafo 1.2.3, possiamo dire che essendo le pareti impermeabili $\Phi_s = 0$; inoltre F_v può essere vista come la risultante di tutte le forze agenti sul fluido. Si può dunque scrivere:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} dV = \sum_j w_j \vec{u}_j + F_v \quad (1.12)$$

Dove le portate w_j sono dotate di segno (positive se entranti).

1.3.4 Equazione di conservazione dell’energia

L’energia (interna, cinetica e potenziale) per unità di volume è, naturalmente:

$$G = \rho \left[e + \frac{u^2}{2} + gz \right] \quad (1.13)$$

I flussi di energia associati alle portate sono dovuti, oltre che all’energia trasportata dalla portata stessa, anche dal lavoro di pressione compiuto dal fluido entrante o uscente dal volume:

$$\Phi_{w_j} = w_j \left(e_j + \frac{u_j^2}{2} + gz_j \right) + \frac{P_j}{\rho_j} w_j = w_j \left(e_j + \frac{u_j^2}{2} + gz_j \right) + P_j A_j u_j$$

L'energia scambiata attraverso la superficie S sarà la somma di calore Q e lavoro W (positivi se entranti), mentre il termine di generazione sarà dato dalla potenza generata all'interno di V (ad esempio attraverso reazioni chimiche, o riscaldamento tramite micro-onde, etc.); l'equazione complessiva sarà dunque:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_j w_j \left(h_j + \frac{u_j^2}{2} + gz_j \right) + Q + W + F_v \quad (1.14)$$

Se $\rho(x, y, z, t) = \rho(t)$ e $e(x, y, z, t) = e(t)$ (densità e proprietà termodinamiche uniformi sul volume), e inoltre i termini meccanici sono trascurabili, si può scrivere il seguente modello:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = \sum_j w_j h_j + Q + W + F_v \\ E(t) = M(t)e(t) = \rho(t)Ve(t) \end{cases} \quad (1.15)$$