

# PROPAGAZIONE ONDE

(1)

- PROPAGAZIONE DELLE ONDE IN UN CONDOTTO (LIQUIDO)

- Rimuoviamo l'ipotesi di fluido incompressibile ( $\rho = \text{cost}$ ) e introduciamo l'effetto della comprimibilità del liquido

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta P}{B} \quad \text{acque: } B = 21'000 \text{ bar}$$

per i liquidi,  $B$  è sempre molto elevata, quindi le variazioni di densità sono comunque modeste

- Consideriamo una condotta elastica cilindrica

$$\frac{dA}{A} = \frac{dP}{K}$$

$$K = E \cdot \frac{S}{D}$$

$\downarrow$  modulo Young       $S$  ← spessore  
 $D$  ← diametro

$$A(x,t) = A_0 + \Delta A(x,t) = A_0 + \frac{A_0}{K} \Delta P(x,t) \quad (\Delta A \ll A_0)$$

- Trascuriamo l'attrito  $\Rightarrow \varphi = 0$

- Supponiamo la condotta adiabatica  $\Rightarrow \varphi = 0$

- Equazione della massa

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

$$d\rho A = \rho dA + A d\rho = A \left( \frac{\rho}{K} + \frac{\rho}{B} \right) dP$$

$$A \left( \frac{\rho}{K} + \frac{\rho}{B} \right) \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

$$\frac{A}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1}{c_0^2} = \frac{\rho}{B} \quad , \quad \frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{B} + \frac{\rho}{K}$$

vedremo che  $c_0$  e  $c$  sono le velocità di propagazione delle onde

# PROPAGAZIONE ONDE

(2)

• Regime  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = 0 \quad \bar{w}(x) = \bar{w}$$

• Linearizzazione

$$\boxed{\frac{A}{c^2} \frac{\partial \Delta P}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0}$$

- Equazione q.d.m.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \rho A u^2}{\partial x} + \rho A g \frac{dz}{dx} + A \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

• Regime

$$\begin{aligned} \frac{d \bar{\rho} \bar{A} \bar{u}^2}{dx} &= \frac{d}{dx} \frac{\bar{w}^2}{\bar{\rho} \bar{A}} = \bar{w}^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{\bar{\rho} \bar{A}} = - \frac{\bar{w}^2}{(\bar{\rho} \bar{A})^2} \frac{d}{dx} \bar{\rho} \bar{A} \\ &= - \bar{A} \frac{\bar{u}^2}{c^2} \frac{d \bar{P}}{dx} \end{aligned}$$

Perché  $u \ll c \rightarrow$  termine trascurabile rispetto ad  $A \frac{dP}{dx}$

$$\bar{\rho} \bar{A} g \frac{dz}{dx} + \bar{A} \frac{d \bar{P}}{dx} = 0$$

$$\int_0^L \bar{\rho} \bar{A} g \frac{dz}{dx} dx + \int_0^L \bar{A} \frac{d \bar{P}}{dx} dx = 0$$

Le variazioni di  $\bar{\rho}$  e  $\bar{A}$  sono molto piccole  $\rightarrow$  porto fuori dal segno di integrale

$$P_u - P_i = \bar{\rho} g (z_i - z_u)$$

# PROPAGAZIONE ONDE

(3)

• Linearizzazione

Supponiamo che il contributo del termine  $\frac{\partial \rho A u^2}{\partial x}$  sia trascurabile anche in transitorio

$$\frac{\partial \Delta W}{\partial t} + A \frac{\partial \Delta P}{\partial x} = 0$$

- Equazione energia (forma entropica)

$$\rho A T \frac{\partial S}{\partial t} + W T \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

• Regime -

$$W T \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

$$\bar{S}(x) = \bar{S} = \bar{S}_i$$

• Linearizzazione

$$\bar{\rho} \bar{A} \bar{T} \frac{\partial \Delta S}{\partial t} + \bar{W} \bar{T} \frac{\partial \Delta S}{\partial x} + \Delta(W T) \frac{\partial \bar{S}}{\partial x} = 0$$

$$\bar{\rho} \bar{A} \frac{\partial \Delta S}{\partial t} + \bar{W} \frac{\partial \Delta S}{\partial x} = 0$$

# PROPAGAZIONE ONDE

(4)

## - SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI LINEARIZZATE

- Applichiamo il metodo delle trasformate di Laplace per ridurre le PDE a ODE lineari omogenee, che risolveremo col metodo di Eulero

$$\begin{cases} \frac{A}{c^2} s DP + \frac{d\Delta W}{dx} = 0 & \text{massa} \\ s \Delta W - A \frac{dDP}{dx} = 0 & \text{qdm} \\ s DS + \bar{u} \frac{d\Delta S}{dx} = 0 & \text{energia} \end{cases}$$

$$DP = -\frac{c^2}{sA} \frac{d\Delta W}{dx}$$

$$s \Delta W - A \frac{c^2}{sA} \frac{d^2 \Delta W}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^2 \Delta W}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2} \Delta W = 0 \quad \text{eq. lineare omogenea a coeff. cost.}$$

equazione caratter.:  $\lambda^2 - \frac{s^2}{c^2} = 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{s}{c} \quad \Delta W = K_1 e^{\lambda_1 x} + K_2 e^{\lambda_2 x}$$

integrale generale

$$\begin{aligned} \Delta W(x, s) &= K_1(s) e^{-\frac{s}{c} x} + K_2(s) e^{+\frac{s}{c} x} \\ \Delta P(x, s) &= \frac{c}{A} K_1(s) e^{-\frac{s}{c} x} - \frac{c}{A} K_2(s) e^{\frac{s}{c} x} \end{aligned}$$

$K_1(s), K_2(s)$  da determinare in base alle condizioni al contorno

# PROPAGAZIONE ONDE

(5)

$$\frac{d\Delta S}{dx} + \frac{s}{\bar{u}} \Delta S = 0$$

eq. lineare omogenea a coeff. cost.  
 eq. carott.  $\lambda + \frac{s}{\bar{u}} = 0$

$$\Delta S(x, s) = K_3(s) e^{-\frac{s}{\bar{u}} x}$$

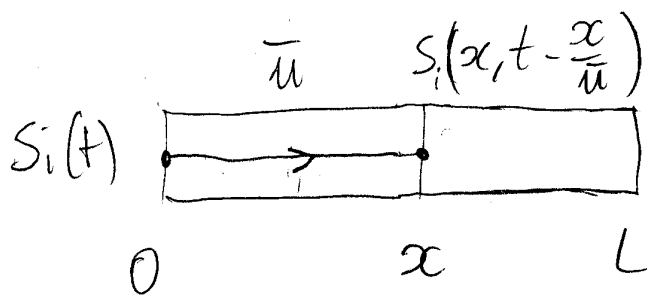
Prendendo come condizione al contorno l'entropia all'ingresso

$$\Delta S(0, s) = \Delta S_i(s) \text{ si trova immediatamente}$$

$$\boxed{\Delta S(x, s) = \Delta S_i(s) e^{-\frac{s}{\bar{u}} x}}$$

- Interpretazione fisica: eq. entropia

$$\Delta S(x, t) = \Delta S_i\left(t - \frac{x}{\bar{u}}\right)$$



- L'entropia si propaga con la velocità del fluido  $\bar{u}$
- Se  $\Delta S_i = 0 \Rightarrow \Delta S(x, t) = 0$  processo isentropico

# PROPAGAZIONE ONDE

(6)

- Interpretazione fisica: eq. massa + q.d.m.

$$\Delta W(x,t) = K_1 \left(t - \frac{x}{c}\right) + K_2 \left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$\Delta P(x,t) = \frac{c}{A} K_1 \left(t - \frac{x}{c}\right) - \frac{c}{A} K_2 \left(t + \frac{x}{c}\right)$$

| onde progressive | onde regressive

- Le perturbazioni di pressione e portata si propagano in avanti e all'indietro con la velocità del suono  $c$
- Nel caso di condotta infinitamente rigida ( $K \rightarrow \infty$ )

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{B}}} = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = c_0, \text{ acqua: } c_0 = \sqrt{\frac{21000 \cdot 10^5}{10^3}} = 1450 \frac{m}{s}$$

• In generale

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{B} + \frac{\rho}{K}}} = \sqrt{\frac{\frac{BK}{B+K}}{\rho}} < c_0$$

e l'elasticità della condotta aumenta la comprimibilità effettiva del liquido, e quindi riduce la velocità del suono

# PROPAGAZIONE ONDE

(7)

- Ad ogni perturbazione di pressione, che si muove con velocità  $\pm c$ , corrisponde una perturbazione di portata; il rapporto vale

$$\frac{\Delta P}{\Delta W} = \pm \frac{c}{A} = \pm Z$$

$Z$ : impedenza caratteristica del condotto

(+) onde progressive

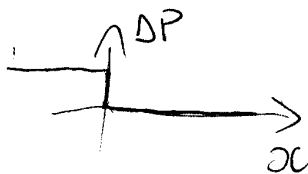
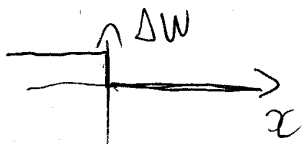
(-) onde regressive

- P.es:  $K_1(t) = sc \alpha(t) \Rightarrow$

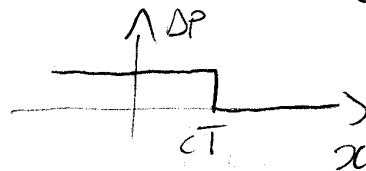
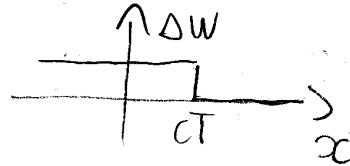
$$\Delta W = sc \alpha \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad (\text{progressive})$$

$$\Delta P = \frac{c}{A} sc \alpha \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

$t=0$



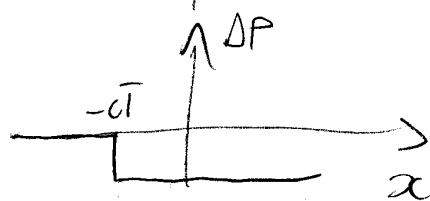
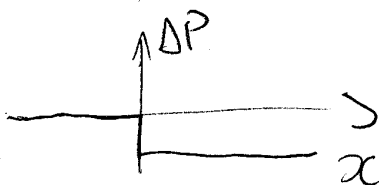
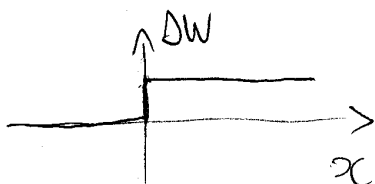
$t=T$



$K_2(t) = sc \alpha(t) \Rightarrow$

$$\Delta W = sc \alpha \left( t + \frac{x}{c} \right)$$

$$\Delta P = -\frac{c}{A} sc \alpha \left( t + \frac{x}{c} \right)$$



# PROPAGAZIONE ONDE

8

## SOLUZIONE RIGOROSA

- Se si considera anche il termine cinetico  $\frac{\partial \rho A \bar{u}^2}{\partial x}$  nella equazione della q.d.m., si ottiene una soluzione simile, dove però la velocità di propagazione vale

$$\bar{u} \pm c$$

e le impedenze caratteristiche valgono

$$\frac{c^2}{A(c+\bar{u})} \quad , \quad - \frac{c^2}{A(c-\bar{u})} \quad (\text{vedi dispensa})$$

- Se  $\bar{u} \ll c$  la soluzione approssimata è più che soddisfacente; tipicamente  $\bar{u} < 10 \text{ m/s}$ ,  $c \approx 1000 \text{ m/s}$
- Il termine cinetico diventa ben più rilevante in presenza di variazioni significative della sezione del condotto

$$A = A_0(x) + \frac{A_0}{K} \Delta P \quad \frac{\partial A_0}{\partial x} \neq 0$$

## PROPAGAZIONE ONDE IN CONDOTTE PERCORSE DA GAS

- la derivazione teorica è molto simile; in particolare, se le condizioni sono di moto isentroico, si può assumere che

$$p = p(P, S) = p(P, \bar{S}) = p(P)$$

quindi  $\frac{dp}{dP} = \frac{\partial p}{\partial P} \Big|_S$ , che può essere calcolata lungo una trasformazione isentropica



## PROPAGAZIONE ONDE

(9)

- Una trasformazione isentropica per un gas ideale comporta

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cost} \Rightarrow \frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

$$\frac{d\rho}{dP} = \frac{1}{\gamma} \frac{\rho}{P} = \frac{1}{\gamma R^* T}$$

con  $R^* = \frac{R}{M}$   $R$  = cost. universale gas  
 $M$  = massa molecolare

- Riprendendo l'equazione della massa  $\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0$

$$d\rho A = \rho dA + A d\rho = A \left( \frac{\rho}{K} + \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_s \right) dP = \frac{A}{c^2} dP$$

→ Il termine  $\frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_s$  gioca lo stesso ruolo di  $\frac{\rho}{K}$  nel caso dei liquidi; in particolare, se  $K \rightarrow \infty$  (condotta rigida)

$$c = \frac{1}{\sqrt{d\rho/dP}} = \sqrt{\gamma R^* T}$$

- Per l'aria a temperatura ambiente risulta  $c \approx 340 \frac{m}{s}$

- EQUAZIONI RISOLTE RISPETTO ALLE C.C.

- Imponendo condizioni al contorno in  $x=0$ , si trova

$$\Delta W(x,s) = \Delta W(0,s) \text{ch}(\nu x) - \frac{1}{z} \Delta P(0,s) \text{sh}(\nu x)$$

$$\Delta P(x,s) = \Delta P(0,s) \text{ch}(\nu x) - z \Delta W(0,s) \text{sh}(\nu x)$$

$$\Delta S(x,s) = \Delta S(0,s) e^{-\mu x}$$

con  $\nu = \frac{s}{c}$

$$\mu = \frac{s}{M}$$

## PROPAGAZIONE ONDE

(10)

- Si noti che in generale non ha senso fisico imporre entrambe le c.c. idrauliche all'ingresso, quindi le equazioni vanno completate con c.c. realistiche
- Posto  $x=L$  (sbocco delle condotte), si può scrivere

$$\begin{cases} \Delta W_u = \Delta W_i \operatorname{ch}(s\tau) - \frac{1}{Z} \Delta P_i \operatorname{Sh}(s\tau) & \tau = \frac{L}{c} \\ \Delta P_u = \Delta P_i \operatorname{Ch}(s\tau) - Z \Delta W_i \operatorname{Sh}(s\tau) & \tau_u = \frac{L}{u} \\ \Delta S_u = \Delta S_i e^{-s\tau_u} \end{cases}$$

$\Delta W_u, \Delta P_u, \Delta S_u$ : valori all'uscita della condotta

$\Delta W_i, \Delta P_i, \Delta S_i$ : " all'ingresso "

- Le equazioni appena scritte rappresentano in forma comoda l'integrale generale delle equazioni a derivate parziali linearizzate. Per ottenere la soluzione di uno specifico problema occorrerà aggiungere 3 equazioni, corrispondenti alle condizioni al contorno, del tipo:

$$\alpha_i \Delta W_i(s) + \beta_i \Delta P_i(s) = \gamma_i \Delta W_i^0(s) + \delta_i \Delta P_i^0(s)$$

$$\alpha_u \Delta W_u(s) + \beta_u \Delta P_u(s) = \gamma_u \Delta W_u^0(s) + \delta_u \Delta P_u^0(s)$$

$$\Delta S_i(s) = \Delta S_i^0(s)$$

dove i termini con indice <sup>0</sup> sono le forzanti (ingressi esogeni) e  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  opportuni coefficienti costanti

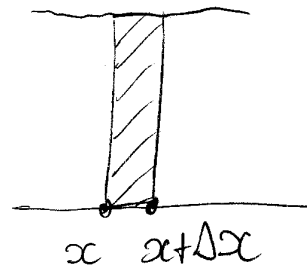
# PROPAGAZIONE ONDE

(11)

## - EQUIVALENTE ELETTRICO

- È possibile formulare un equivalente elettrico della parte idraulica del modello. Moltiplicando le equazioni di conservazione della massa e della p.d. m linearizzate per la lunghezza  $\Delta x$  di un elemento di condotta, risulta:

$$\begin{cases} \frac{A \Delta x}{c^2} \frac{\partial DP}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} \Delta x = 0 \\ \frac{\partial \Delta W}{\partial t} \Delta x + A \frac{\partial DP}{\partial x} \Delta x = 0 \end{cases}$$



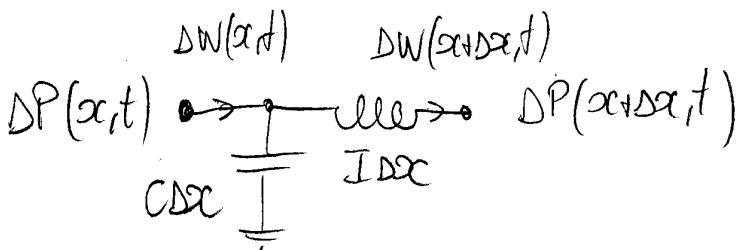
che si può riformulare come

$$\begin{cases} C \Delta x \frac{d}{dt} DP(x,t) = \Delta W(x,t) - \Delta W(x+\Delta x,t) \\ I \Delta x \frac{d}{dt} \Delta W(x+\Delta x) = DP(x,t) - DP(x+\Delta x,t) \end{cases}$$

dove  $C = \frac{A}{c^2}$  è una capacità per unità di lunghezza

$I = \frac{1}{A}$  è una inertanza per unità di lunghezza

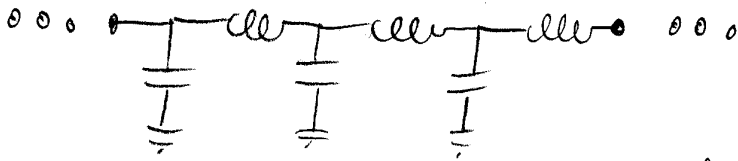
- Il circuito elementare equivalente è



## PROPAGAZIONE ONDE

12

- la condotta  $\bar{\sigma}$  quindi rappresentata dalla connessione serie di  $\infty$  elementi



- Si tratta del modello elettrico di una linea di trasmissione (p.es., un cavo coassiale)

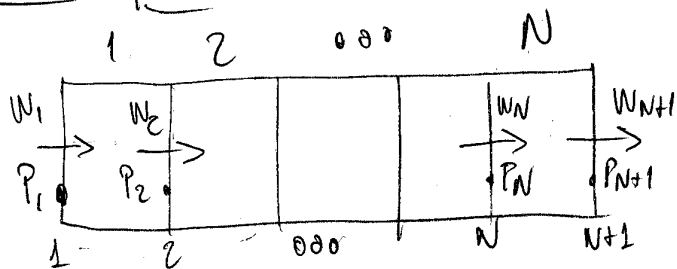
### - INTEGRAZIONE NUMERICA

- Gli ambienti di simulazione non supportano direttamente l'integrazione di PDE (salvo i codici per simulazione di dettaglio 2D o 3D). Occorre quindi trasformare le PDE in equazioni maneggevoli numericamente
- Strategia #1: volumi finiti  
Si integrano le equazioni su volumi di lunghezza finita, e si approssimano i valori medi con i valori in punti opportuni. Si ottengono sistemi ODE.
- Strategia #2: discretizzazione temporale  
Si adotta un algoritmo di integrazione a passo fisso, in cui  $\Delta t$  sia un sottomultiplo del tempo di attraversamento dell'onda.  
Si ottengono equazioni dinamiche a tempo discreto

# PROPAGAZIONE ONDE

(13)

- Volumi finiti



lunghezza totale:  $L$

lunghezza cella  $l = \frac{L}{N}$

$$\int_{(j-1)l}^{jl} \frac{A}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} dx + \int_{(j-1)l}^{jl} \frac{\partial w}{\partial x} dx = 0 \quad (\text{mossa})$$

$$\boxed{\frac{Al}{c^2} \frac{d}{dt} P_{mj} = w_j - w_{j+1}} \quad j = 1 \dots N$$

$$\int_{(j-1)l}^{jl} \frac{\partial w}{\partial t} dx + \int_{(j-1)l}^{jl} \rho A g \frac{dz}{dx} dx + \int_{(j-1)l}^{jl} A \frac{\partial P}{\partial x} dx = 0$$

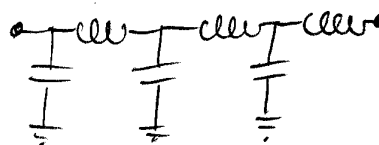
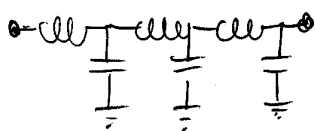
$$\boxed{e \frac{d}{dt} w_{mj} + \rho A g (z_j - z_{j+1}) + A (P_{j+1} - P_j) = 0} \quad j = 1 \dots N$$

• si può scegliere:

$$\boxed{\begin{aligned} w_{mj} &= w_j \\ P_{mj} &= P_{j+1} \end{aligned}}$$

oppure

$$\boxed{\begin{aligned} w_{mj} &= w_{j+1} \\ P_{mj} &= P_j \end{aligned}}$$



## PROPAGAZIONE ONDE

(14)

- NB: è possibile anche aggiungere il termine di attrito distribuito

$$\int_{(j-1)l}^{jl} \frac{c p w}{\rho A^2} w^2 dx = \frac{c p w l}{\rho A^2} w_{mj}^2$$

### - DISCRETIZZAZIONE TEMPORALE

- Partendo dalle equazioni linearizzate, è possibile antitrasformare nel dominio del tempo, grazie alla presenza di soli termini del tipo  $e^{-st}$ , che corrispondono a ritardi puri. Si possono quindi reinterpretare le equazioni come quelle di un sistema a segnali campionati, descritto da equazioni a tempo discreto

- Risultati analoghi si ottengono utilizzando il metodo delle caratteristiche, che può anche essere applicato alle equazioni non-lineari

(vedi Ferrazzi, Toffazzoni, Rossi, "A novel approach to Speed Control of Hydro Power Stations", Automatica, 1990)