

# SCAMBIATORI

①

## - INTRODUZIONE

- Gli scambiatori di calore giocano un ruolo chiave nell'ingegneria industriale, in particolare negli impianti per la generazione o conversione dell'energia

- lo scopo di uno scambiatore è di trasferire calore da un fluido caldo ad un fluido freddo, senza contatto diretto tra i due. A seconda dei casi, si possono avere scambiatori

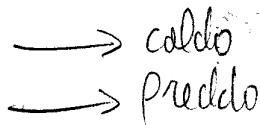
liquido/liquido (es: impianti di riscaldamento)

liquido/gas (es: caldaie, radiatori)

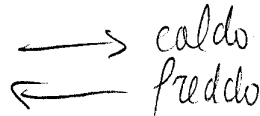
gas/gas (es: riscaldatori d'aria)

- Si possono avere diverse configurazioni geometriche

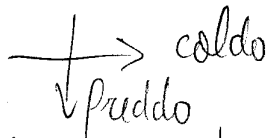
• equicorrente



• controcorrente



• cross-flow



- Svilupperemo le basi della modellistica di tali processi, e studieremo la dinamica di alcune semplici configurazioni, in modo da poter affrontare il progetto dei relativi sistemi di controllo

## SCAMBIATORI

(2)

### - MODELLO LATO FLUIDO: PREMESSE

- Nel caso di uno scambiatore di tipo tubolare, la dinamica del fluido all'intorno dei tubi può essere studiata con le equazioni di conservazione a parametri distribuiti 1D di massa, q.d.m. ed energia
- Per semplicità, ci limiteremo allo studio nell'ipotesi di fluido incompressibile ( $\rho = \text{cost}$ ). Questo permette di disaccoppiare completamente l'idraulica (massa + q.d.m) dalla termica, che riceve "in ingresso" le portate determinate dall'idraulica
- I modelli ricavati sono buoni nel caso di liquidi con basso coefficiente di dilatazione termica e/o con ridotti salti termici, e danno una valutazione solo qualitativa del caso di gas, a pressione circa costante
- La valutazione più accurata in casi più generali richiede una simulazione di tipo numerico

# SCAMBiatori

3

## - EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE - FLUIDO

- Massa  $+ q dm \rightarrow$  vedi processi idraulici

- Energia: scriviamo l'equazione dell'energia nell'ipotesi di fenomeni termici dominanti (trascurando l'energia potenziale e cinetica)

$$\frac{\partial \rho A e}{\partial t} + \frac{\partial w h}{\partial x} = w \varphi$$

$w$ : perimetro bagnato

$\varphi$ : flusso termico

- Nell'ipotesi di fluido incompressibile e tubo rigido,  $\rho A = \text{cost}$   
dall'eq. della massa,  $\frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{\partial \rho A}{\partial t} = 0$

$$\rho A \frac{\partial e}{\partial t} + w \frac{\partial h}{\partial x} = w \varphi$$

- Nel caso dei liquidi (alta densità, bassa comprimibilità)  
si può scrivere

$$de \simeq dh \simeq c dT$$

dove  $c = c_p \simeq c_v$

quindi si ottiene

$$\rho A c \frac{\partial T}{\partial t} + w c \frac{\partial T}{\partial x} = w \varphi$$

## SCAMBIATORI

(4)

- RICHIAMI DI CONDUZIONE DEL CALORE NEI SOLIDI

- la conduzione del calore in un solido isotropo che occupa un volume  $V$  è descritta dall'equazione

$$\rho_m c_m \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} (\lambda \cdot \text{grad}(T)) + q = \\ = \nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla T) + q$$

$\rho_m$ : densità [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]

$c_m$ : capacità termica specifica [ $\text{J}/\text{kgK}$ ]

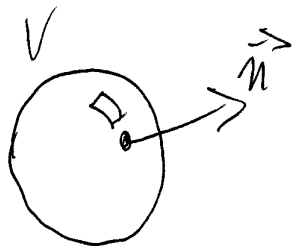
$\lambda$ : conduttività termica [ $\text{W}/\text{mK}$ ]

$q$ : potenza termica generata per u. di volume [ $\text{W}/\text{m}^3$ ]

- Il flusso termico uscente dalla frontiera di  $V$  vale

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$$

dove  $\frac{\partial T}{\partial n}$  è la derivata direzionale lungo la normale uscente dalla frontiera



# SCAMBIATORI

(5)

- Nel caso in cui  $\lambda$  sia uniforme, l'equazione diventa

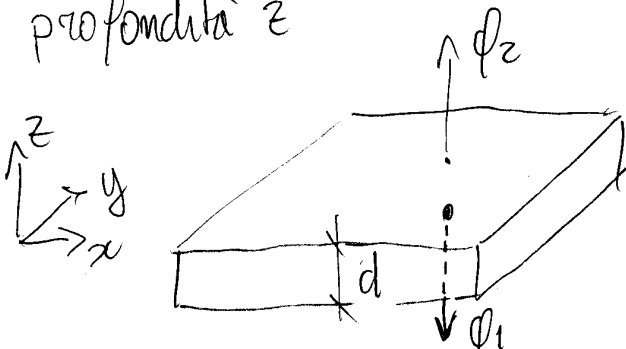
$$\rho_m c_m \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + q$$

- In coordinate cartesiane,

$$\nabla^2 T = \text{div grad}(T) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

- CONDIZIONE IN LASTRE PIANE

- Se consideriamo una lastra piana di dimensioni indefinite e spessore  $d$ , la temperatura dipenderà solo dalla profondità  $z$



$$T = T(z, t)$$

- Soluzione a regime, senza generazione di potenza:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ,  $q = 0$

$$0 = \lambda \nabla^2 T$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha = \text{cost.}$$

condizioni al contorno: flussi uscenti

$$\phi_1 = -\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial n} = \lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial z} = \alpha \lambda$$

$$\phi_2 = -\lambda \frac{\partial T(d, t)}{\partial n} = -\alpha \lambda$$

## SCAMBIATORI

(6)

- Per tanto  $\phi_1 + \phi_2 = 0$  (conservazione dell'energia)

$$\phi_2 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{d} = \frac{\lambda}{d} (T_1 - T_2)$$

La conduttività specifica per unità di area vale quindi

$$\frac{\phi}{T_1 - T_2} = \frac{\lambda}{d} \quad \left( \frac{W}{m^2 K} \right)$$

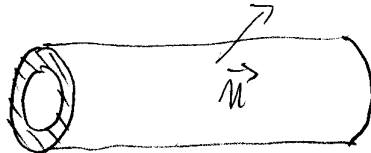
- Si noti che la conduzione (a regime) in lastre sottili, anche se non piane, può essere approssimata dal caso piano, trascurando gli effetti di bordo e trascurando la conduzione trasversale.

# SCAMBiatori

(7)

## - EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE - PARETE

- Il fluido deve essere contenuto da una parete, per evitare la miscelazione. Supponiamo che sia cilindrica e di metallo (alto coeff. di conducibilità termica, supposto costante per semplice)



- In generale, all'interno del volume del metallo vale l'equazione di Fourier

$$\rho_m c_m \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T$$

con condizioni al contorno

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$$

$\rho_m$ : densità metallo

$c_m$ : densità metallo

$\lambda$ : coeff. conducibilità

$q$ : flusso termico per u. di superficie

$\vec{n}$ : vettore normale

## - APPROSSIMAZIONE PARETE IPERSOTTILE

- Normalmente, la tubazione può essere considerata sottile, ovvero dello spessore  $s$ , il numero di Biot è  $\ll 1$

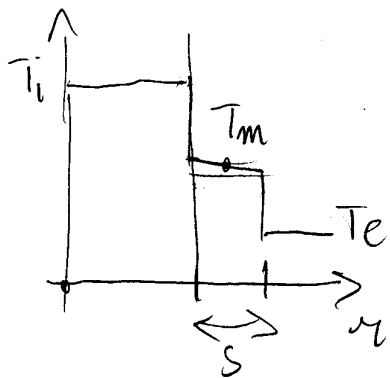
$$Bi = \frac{\gamma s}{\lambda} \ll 1$$

$\gamma$ : coeff. scambio convettivo

questo significa che la resistenza termica dovuta alla conducibilità del metallo è  $\ll$  della resistenza dovuta allo scambio convettivo sul contorno; in altre parole, il calore si distribuisce più facilmente e rapidamente lungo lo spessore che verso l'esterno

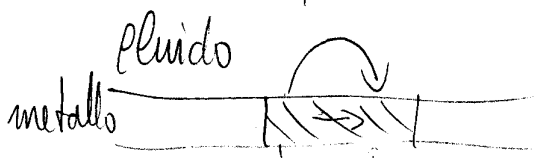
# SCAMBiatori

8



- Si può quindi assumere che la distribuzione di temperatura sia circa uniforme (hp di parete ipersotile), ed uguale alla temperatura baricentrale  $T_m$

- Lungo la direzione assiale, possiamo trascurare la conduzione, che per portate di fluido significative è dominata dalla convezione attraverso il fluido



- Se ci si dà un "fetto" di tubo di lunghezza  $dx$ , assumendo uniforme la temperatura rispetto ad  $r$  e trascurando la conduzione lungo  $x$ , si può scrivere

$$\frac{dE}{dt} = \sum Q$$



$w_e$ : perimetro esterno

$w_i$ : perimetro interno

$$\rho_m c_m A_m dx \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = w_e dx \phi_e - w_i dx \phi_i \quad ; \quad \text{dividendo per } dx:$$

$$\rho_m c_m A_m \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = w_e \phi_e - w_i \phi_i$$

- Se si trascura la distribuzione radiale di temperatura, si può scrivere

$$T_{pe}(x,t) = T(x,t)$$

temperatura di parete esterna

$$T_{pi}(x,t) = T(x,t)$$

" " interna

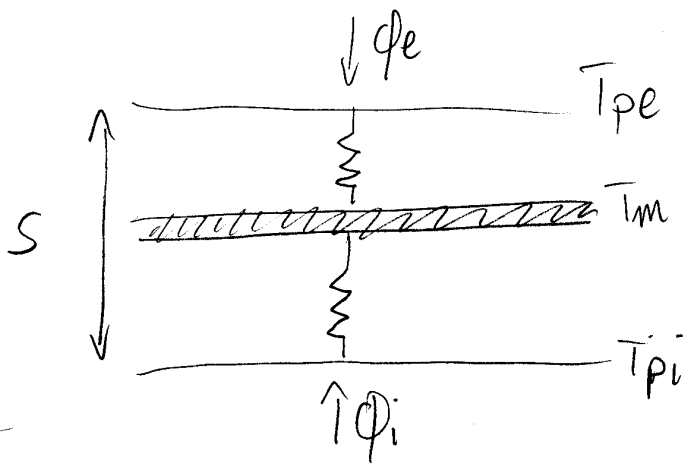


# SCAMBIATORI

(9)

## - APPROSSIMAZIONE DI PARETE SOTTILE

- Se il numero di Biot  $\bar{e} < 1$  ma non troppo, può essere necessario tenere in conto della differenza tra temperatura interna ed esterna
- Approssimando la parete come piana, e concentrando l'accumulo di energia nelle fibre baricentriche, si ottiene il seguente modello:



$$\phi_e = \frac{2\lambda}{s} (T_{pe} - T)$$

$$\phi_i = \frac{2\lambda}{s} (T_{pi} - T)$$

soluzioni dell'eq. di Fourier  
stazionaria per parete piana

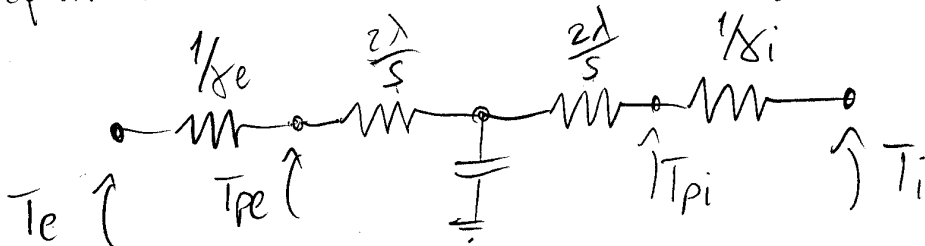
eq. bilancio:  $\rho_m c_m s \frac{\partial T_m}{\partial t} = \phi_e + \phi_i$

l'approssimazione è ovviamente valida in bassa frequenza

- In presenza di scambio convettivo sulle pareti

$$\phi_e = h_e (T_e - T_{pe}) \quad ; \quad \phi_i = h_i (T_i - T_{pi})$$

l'equivalente elettrico complessivo è il seguente:



# SCATIBIATORI

(10)

- APPROSSIMAZIONI DI ORDINE ELEVATO

- le approssimazioni oppone viste sono di norma sufficienti per lo studio delle dinamiche di temperatura del fluido.

- Nel caso in cui si voglia studiare lo stato di stress termico della parete, occorre una descrizione più accurata della distribuzione di temperatura.

- Restando per semplicità nell'ipotesi di parete piana,  $\lambda = \text{cost}$  e diffusione longitudinale trascurabile, si può scrivere

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T_m}{\partial z^2} \quad D = \frac{\lambda}{\rho_m c_m}$$

trasf. Laplace:  $ST(z, s) = D \frac{d^2 T(z, s)}{dz^2}$

integrale generali:  $T(z, s) = K_1(s) \text{Ch}(vz) + K_2(s) \text{Sh}(vz)$

$$\text{con } v^2 = \frac{s}{D} = \frac{\rho_m c_m s}{\lambda}$$

$K_1(s), K_2(s)$  vanno determinate in base alle condizioni al contorno

- Si possono poi approssimare le f.d.t. risultanti, p.c.s., con le approssimazioni di Padé

- In alternativa, si possono discretizzare le PDE con un metodo a salto (differenze finite, volumi finiti, elementi finiti), ottenendo un sistema di ODE che ne approssima la dinamica. Al crescere del # di nodi il modello diventa buono fino a frequenze più elevate

# SCAMBIATORI

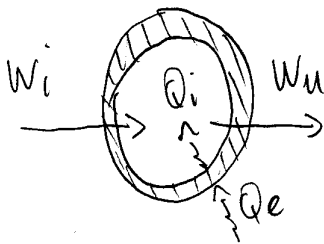
(11)

## - RISCALDATORE A PARAMETRI CONCENTRATI

- Prima di affrontare lo studio degli scambiatori 1D, analizziamo brevemente la dinamica di un riscaldatore descrivibile tramite un modello a p.c. Questo aiuterà a meglio comprendere le successive analisi.

- Hp modellistiche

- $\rho = \text{cost}$ ,  $dh \simeq de \simeq c dT$  (liquido incompressibile)  
 $c = \text{cost}$
- parete ipersottile (trascuriamo la resistenza termica della parete dovuta alla conduzione termica)
- miscelazione perfetta (modello a parametri concentrati)



$$\frac{dT}{dt} = w_i - w_u \quad (\text{massa fluido})$$

$$\frac{dE}{dt} = w_i h_i - w_u h_u + Q_i \quad (\text{energia fluido})$$

$$\frac{dE_m}{dt} = Q_e - Q_i$$

$$M = \rho V = \text{cost}$$

$$E = M \bar{c} T$$

$$h_i = c \bar{c} T_i; \quad h_u = c T \quad \Rightarrow$$

$$Q_i = \chi_i S_i (T_m - T) \quad (\text{scambio convettivo})$$

$$E_m = M_m c_m T_m$$

$$w_i = w_u = W$$

$$M c \dot{T} = W c (T_i - T) + \chi_i S_i (T_m - T)$$

$$M_m c_m \dot{T}_m = Q_e - \chi_i S_i (T_m - T)$$

# SCAMBIATORI

(12)

- CASO A:  $Q_e$  imposto

Regime:  $\bar{Q}_e = \bar{Q}_i$

$$\bar{T}_m - \bar{T} = \frac{Q_e}{\gamma_i S_i}$$

$$\bar{T} - \bar{T}_i = \frac{Q_e}{\bar{w}c}$$

Linearizzato:

$$\begin{cases} M_c \dot{\Delta T} = \Delta W c (\bar{T}_i - \bar{T}) + \bar{w} c (\Delta T_i - \Delta T) + \\ \quad + \gamma_i S_i (\Delta T_m - \Delta T) + \Delta \gamma_i S_i (\bar{T}_m - \bar{T}) \\ M_m c_m \dot{\Delta T}_m = \Delta Q_e - \gamma_i S_i (\Delta T_m - \Delta T) - \Delta \gamma_i S_i (\bar{T}_m - \bar{T}) \end{cases}$$

trascurando per semplicità le variazioni del coeff. di scambio  $\Delta \gamma_i$ , si ottengono le seguenti p.d.t.:

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_i} = G_{T_i}(s) = \frac{1 + s\tilde{\tau}_m}{(1 + s\tilde{\tau}_1)(1 + s\tilde{\tau}_2)}$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta Q_e} = G_{Q_e}(s) = \frac{1}{\bar{w}c} \frac{1}{(1 + s\tilde{\tau}_1)(1 + s\tilde{\tau}_2)}$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta W} = G_w(s) = \frac{\bar{T}_i - \bar{T}}{\bar{w}} \frac{1 + s\tilde{\tau}_m}{(1 + s\tilde{\tau}_1)(1 + s\tilde{\tau}_2)}$$

- Dove

$$\tilde{\tau}_m = \frac{M_m C_m}{\gamma_i S_i} \quad (\text{c.d.t. scambio fluido-metallo})$$

il denominatore delle  $f(s)$  vale

$$1 + s \left( \frac{M_c + M_m C_m}{W_c} + \tilde{\tau}_m \right) + s^2 \frac{M_c}{W_c} \tilde{\tau}_m = (1 + s\bar{T}_1)(1 + s\bar{T}_2)$$

cerchiamo di valutare le sue due costanti di tempo

- Hp 1  $M_c \gg M_m C_m$  (parete leggera)

i coefficienti del polinomio sono la somma e il prodotto di  $T_1, T_2$

$$\Rightarrow T_1 \approx \frac{M}{W} ; T_2 \approx \tilde{\tau}_m$$

$$G_{T_1}(s) \approx \frac{1}{1 + s\tilde{\tau}_2}$$

$$G_{Q_c}(s) \approx \frac{1}{W_c} \frac{1}{(1 + s\tilde{\tau}_2)(1 + s\tilde{\tau}_m)}$$

$$G_w(s) \approx \frac{T_1 - \bar{T}}{W} \frac{1}{1 + s\tilde{\tau}_2}$$

→ la temperatura segue le variazioni di  $T_1$  e  $w$  (che agiscono direttamente sul fluido) con una dinamica del 1° ordine di costante di tempo pari al tempo di ricambio

→ la temperatura segue le variazioni del flusso imposto con una dinamica del 2° ordine (il colore deve prima riscaldare la parete)

# SCAMBIATORI

(17)

- Hp2  $M_C < M_m C_m$  (parete massiccia / fluido leggero)

$$\tilde{\tau}_m \ll \frac{M_C + M_m C_m}{\bar{W} C} \quad (\text{scombio termico elevato})$$

$$T_1 \approx \frac{M_C + M_m C_m}{\bar{W} C} > \tilde{\tau}_m \quad ; \quad T_1 \gg \tilde{\tau}_m$$

$$T_2 \approx \tilde{\tau}_m \frac{M_C}{M_C + M_m C_m} < \tilde{\tau}_m$$

- lo zero di  $G_{Ti}$  e  $G_{TW}$  ha una costante di tempo ( $\tilde{\tau}_m$ )

intermedio tra  $T_1$  e  $T_2 \rightarrow$  no sovrallongazioni della risposta a scalino

- Hp3  $\gamma_i \rightarrow \infty$  (scombio termico elevatissimo)

$$\tilde{\tau}_m \rightarrow 0 \quad ; \quad T_1 \rightarrow \frac{M_C + M_m C_m}{\bar{W} C} \quad ; \quad T_2 \rightarrow 0$$

$$G_{Ti} \approx \frac{1}{1 + S \tilde{\tau}_i} \quad ; \quad G_{Qe} \approx \frac{1}{W C} \frac{1}{1 + S \tilde{\tau}_1} \quad ; \quad G_W \approx \frac{\bar{T}_i - \bar{T}}{\bar{W}} \frac{1}{1 + S \tilde{\tau}_1}$$

- lo stesso risultato si può ottenere dalle equazioni di partenza!

$Q_i = \gamma_i S_i (T_m - T)$  è una quantità finita; pertanto

$$\gamma_i \rightarrow \infty \Rightarrow T_m = T$$

si possono sommare le due equazioni dell'energia, ottenendo

$$M_C + M_m C_m \dot{T} = W C (T_i - T) + Q_e \quad \text{da cui è immediato}$$

ricavare le tre fdt appena trovate come caso limite

# SCAMBIATORI

(15)

- Caso A:  $Q_e = Q_i = Q$  (conservazione dell'energia)  
 - Caso B:  $Q_e \neq Q_i$  (scambio convettivo)

$$T_m = \frac{T_e + T_i}{2} > 0$$

$$T_m = \frac{T_e + T_i}{2}$$

$$Q_e = h_e S_e (T_e - T_m)$$

$$Q_i = h_i S_i (T_m - T_i)$$

- CASO B:  $Q_e$  dovuto a scambio convettivo

$$Q_e = h_e S_e (T_e - T_m) \quad (x_e = \text{cost.})$$

$$R_i = \frac{1}{h_i S_i} \quad R_e = \frac{1}{h_e S_e}$$

$$R = R_i + R_e$$

$$Y = \frac{1}{R}$$

$$Y_i = \frac{1}{R_i}$$

- Regime:  $\bar{Q}_e = \bar{Q}_i = \bar{Q}$

$$\bar{Q} = h_e S_e (\bar{T}_e - \bar{T}_m)$$

$$\bar{Q} = h_i S_i (\bar{T}_m - \bar{T}_i)$$

$$\bar{Q} = \bar{w} c (\bar{T} - \bar{T}_i)$$

$$\bar{T} = \frac{\bar{w} c \bar{T}_i + h_e S_e \bar{T}_e}{\bar{w} c + h_e S_e}$$

- Linearizzato: scrivendo le equazioni linearizzate e trasformando secondo Laplace, si ottengono le seguenti fct ( $\Delta x_i = 0$ )

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_i} = G_{Ti}(s) = \frac{\bar{w}c}{\bar{w}c + \gamma} \cdot \frac{1 + s\tilde{\tau}_m}{(1 + s\bar{T}_1)(1 + s\bar{T}_2)}$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_e} = G_{Te}(s) = \frac{\gamma}{\bar{w}c + \gamma} \cdot \frac{1}{(1 + s\bar{T}_1)(1 + s\bar{T}_2)}$$

$$\tilde{\tau}_m = \frac{\tau_{m1}\tau_{m2}}{\tau_{s1} + \tau_{s2}}$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta W} = G_w(s) = \frac{c(\bar{T}_i - \bar{T})}{\bar{w}c + \gamma} \cdot \frac{1 + s\tilde{\tau}_m}{(1 + s\bar{T}_1)(1 + s\bar{T}_2)}$$

il denominatore vale

$$1 + \frac{Mc + (\bar{w}c + \gamma)\tilde{\tau}_m}{\bar{w}c + \gamma} s + \frac{Mc\tilde{\tau}_m}{\bar{w}c + \gamma} s^2$$

- Hp1 parete leggera  $Mc \ll \tau_{m1}\tau_{m2}$  e scambio intorno effluente  $\tilde{\tau}_m \rightarrow 0$

$$T_1 \approx \frac{Mc}{\bar{w}c + \gamma}$$

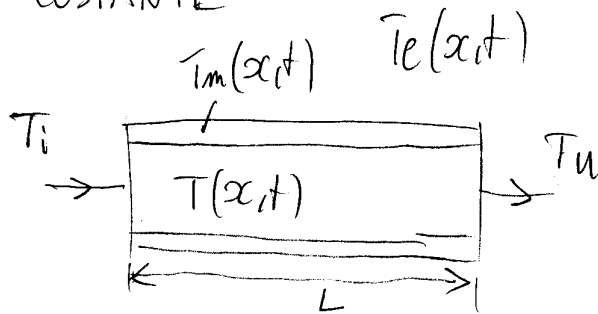
$$T_2 \approx \tilde{\tau}_m$$



# SCAMBIATORI

(17)

- SCAMBIATORE A TEMPERATURA ESTERNA IMPOSTA E PORTATA COSTANTE



•  $W(x,t) = W = \text{cost.}$

$\Rightarrow \gamma_i = \text{cost}$

$$\left\{ \begin{aligned} \rho A c \frac{\partial T}{\partial t} + w c \frac{\partial T}{\partial x} &= w_i \gamma_i (T_m - T) \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_m A_m c_m \frac{\partial T_m}{\partial t} &= w_e \gamma_e (T_e - T_m) - w_i \gamma_i (T_m - T) \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Risolviamo mettendo in evidenza dei parametri più comodi:

(1) •  $\frac{L}{w c}$  ; (2) •  $\frac{1}{w_e \gamma_e + w_i \gamma_i}$

$$\left\{ \begin{aligned} \tau \frac{\partial T}{\partial t} + L \frac{\partial T}{\partial x} &= \tau \bar{\gamma}_i (T_m - T) \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_m \frac{\partial T_m}{\partial t} &= \lambda_{im} (T - T_m) - \lambda_{me} (T_m - T_e) \end{aligned} \right. \quad (4)$$

dove  $\tau = \frac{M}{W} = \frac{L}{u}$  tempo di attraversamento

$\gamma_{im} = \gamma_i w_i L$        $\gamma_{me} = \gamma_e w_e L$       conduttanze termiche

$\tau_i = \frac{m c}{\gamma_{im}}$       costante di tempo scambio interno / metallo

$\tau_m = \frac{M_m c_m}{\gamma_{im} + \gamma_{me}}$       "      "      metallo / fluidi

$\lambda_{im} = \frac{\gamma_{im}}{\gamma_{im} + \gamma_{me}}$        $\lambda_{me} = 1 - \lambda_{im}$

- Calcolo PdT: trasformiamo secondo Laplace

$$(4): \text{ricavo } T_m(x, s) = \frac{1}{1+s\hat{c}_m} \left[ \lambda_{im} T(x, s) + \lambda_{me} T_e(s) \right]$$

(3): sostituisco  $T_m$  e trovo

$$s\bar{T} + L \frac{dT}{dx} = \frac{\hat{c}}{\hat{c}_i} \left[ \left( \frac{\lambda_{im}}{1+s\hat{c}_m} - 1 \right) T + \frac{\lambda_{me}}{1+s\hat{c}_m} T_e \right]$$

che si può risolvere come eq diff lineare del 1° ordine

$$\frac{dT(x, s)}{dx} + \alpha(s) T(x, s) = \beta(s) T_e(s)$$

$$\text{con } \alpha(s)L = s\hat{c} + \frac{\hat{c}}{\hat{c}_i} \left( 1 - \frac{\lambda_{im}}{1+s\hat{c}_m} \right)$$

$$\beta(s)L = \frac{\hat{c}}{\hat{c}_i} \lambda_{me} \frac{1}{1+s\hat{c}_m}$$

e condizioni al contorno

$$T(0, s) = T_i(s) \quad (\text{temp. ingresso})$$

- la soluzione vale

$$T(x, s) = T_i(s) e^{-\alpha(s)x} + \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} \left( 1 - e^{-\alpha(s)x} \right) T_e(s)$$

# SCAMBIATORI

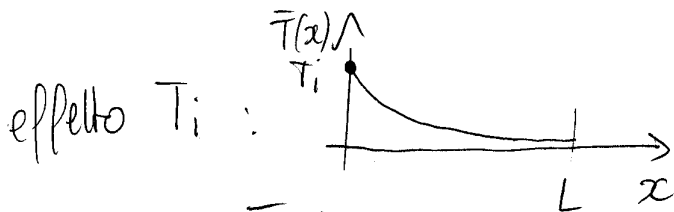
(19)

## - ANALISI A REGIME (S=0)

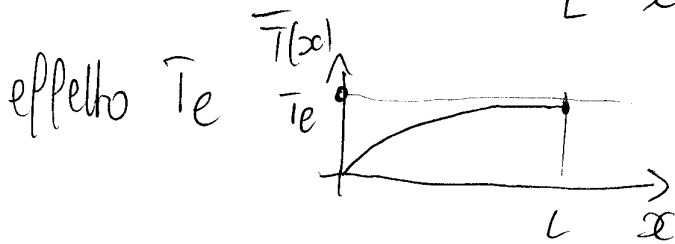
$$\alpha(0) = \frac{1}{L} \frac{\bar{c}}{\bar{c}_i} (1 - \lambda_{im}) = \frac{1}{L} \frac{h_c}{\bar{w}c} \frac{Y_{im}}{h_c} \frac{Y_{me}}{Y_{im} + Y_{me}} = \frac{1}{L} \frac{Y_{tot}}{\bar{w}c}$$

$$\beta(0) = \frac{1}{L} \frac{\bar{c}}{\bar{c}_i} \lambda_{me} = \alpha(0)$$

$$\bar{T}(x) = \bar{T}_i e^{-\frac{x}{L} \frac{Y_{tot}}{\bar{w}c}} + \bar{T}_e \left( 1 - e^{-\frac{x}{L} \frac{Y_{tot}}{\bar{w}c}} \right)$$



Def numero unito  
scambianti



$$\alpha_0 = \frac{Y_{tot}}{\bar{w}c}$$

In particolare  $\bar{T}_u = \bar{T}_i e^{-\alpha_0} + \bar{T}_e (1 - e^{-\alpha_0})$

- Se  $\alpha_0 \ll 1$  (scambiatore "certo") la temperatura all'uscita risente poco di quella esterno e tanto di quella all'ingresso

- Viceversa se  $\alpha_0 \gg 1$

# SCAMBiatori

(20)

- ANALISI DINAMICA: temperatura d'ingresso

$$\begin{aligned}
 T_u(s) &= e^{-s\tau} - \frac{\tau}{\tau_i} \left(1 - \frac{\lambda_{im}}{1+s\tau_m}\right) T_i(s) = \\
 &= e^{-s\tau} \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_i} \left(1 - \frac{\lambda_{im}}{1+s\tau_m}\right)} T_i(s) \\
 &= e^{-s\tau} \cdot G'_{Ti}(s) T_i(s)
 \end{aligned}$$

$\uparrow$  ritardo puro (trasporto)       $\uparrow$  effetto scambio col metallo

• Analizziamo  $G'_{Ti}(s)$  mettendo in evidenza  $\alpha_0$  (# u. scambiatori) e la costante di tempo  $\tau' = \frac{\rho l m c_m}{W C}$  (tempo che impiega il fluido a scaldare il metallo)

$$\begin{aligned}
 G'_{Ti}(s) &= e^{-\frac{\tau}{\tau_i} \frac{1 - \lambda_{im} + s\tau_m}{1 + s\tau_m}} = e^{-\frac{\tau}{\tau_i} \frac{\lambda_{me} + s\tau_m}{1 + s\tau_m}} \\
 &= e^{-\frac{\tau}{\tau_i} \frac{\lambda_{me} + \lambda_{me} s\tau_m + \lambda_{im} s\tau_m}{1 + s\tau_m}} = \\
 &= e^{-\alpha_0} \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_i} \frac{\tau_m \lambda_{im} s}{1 + s\tau_m}} \quad \left(\alpha_0 = -\frac{\tau}{\tau_i} \lambda_{me}\right)
 \end{aligned}$$

- Se supponiamo  $\beta_i \gg \delta_e$ , com'è tipico nei processi energetici, risulta  $\lambda_{im} \approx 1$ , quindi

$$G'_{Ti}(s) = e^{-\alpha_0} e^{-\frac{\tau}{\tau_i} \frac{\tau_m s}{1 + s\tau_m}}$$

# SCAMBIATORI

(12)

- Ora

$$\frac{\tilde{c}}{c_i} \tilde{c}_m = \frac{\pi c}{WC} \frac{Y_{im}}{\pi c} \frac{\pi m c m}{Y_{im} + Y_{me}} \approx \frac{\pi m c m}{WC} = \tilde{c}'$$

$$\tilde{c}_m = \frac{\pi m c m}{Y_{im} + Y_{me}} \cdot \frac{WC}{WC} = \frac{\tilde{c}'}{\alpha_i} \quad \alpha_i = \frac{Y_{im}}{WC}$$

# di u. scambianti:  
per il solo scambio interno

- Nowale

$$G_{T_i}(s) = e^{-s\tilde{c}} \cdot e^{-\alpha_0} \cdot e^{-\frac{s\tilde{c}'}{1 + s\tilde{c}'/\alpha_i}}$$

- Caso particolare: scambio interno infinito

$$j_i \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha_i \rightarrow \infty$$

$$G_{T_i}(s) = e^{-\alpha_0} \cdot e^{-s(\tilde{c} + \tilde{c}')} \quad \tilde{c} + \tilde{c}' = \frac{\pi c + \pi m c m}{WC}$$

si può arrivare a questo risultato osservando che

$j_i \rightarrow \infty \Rightarrow T = T_m$ , quindi si possono sommare

le due PDE di partenza ed ottenerne una più facile da integrare, che porta allo stesso risultato

# SCAMBIATORI

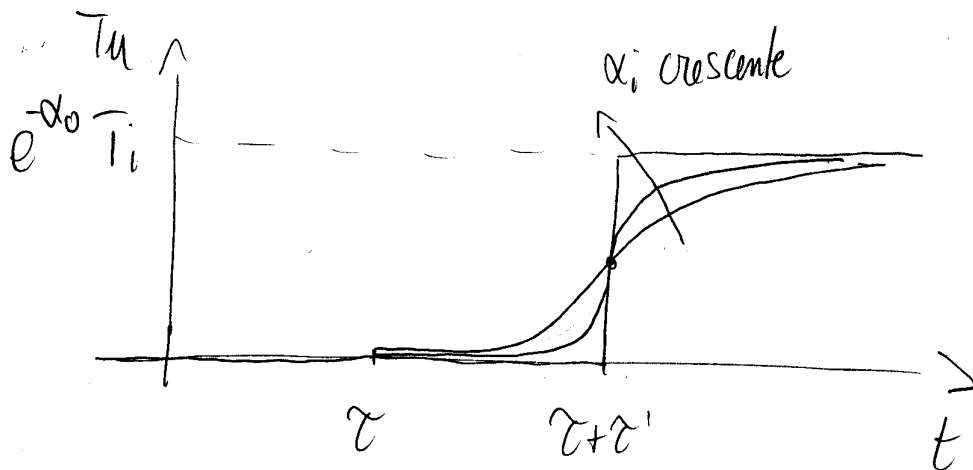
(22)

- Risposta a scalino: il termine di ritardo puro è facile da interpretare. Per quanto riguarda il termine  $G'_{Ti}(s)$ , il th. del valore iniziale ci dice che

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} G'_{Ti}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-\frac{\tau}{\alpha_i} \cdot \frac{\lambda_{me} + s \tilde{m}}{1 + s \tilde{m}}} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-\frac{\tau}{\alpha_i}} = e^{-\alpha_i}$$

al crescere di  $\alpha_i$ , il valore diventa molto piccolo (così come le derivate)



- Risposta in frequenza

$$G_{Ti}(j\omega) = e^{-\tau s} G'_{Ti}(j\omega) \quad \text{ci concentriamo su } G'_{Ti}(s)$$

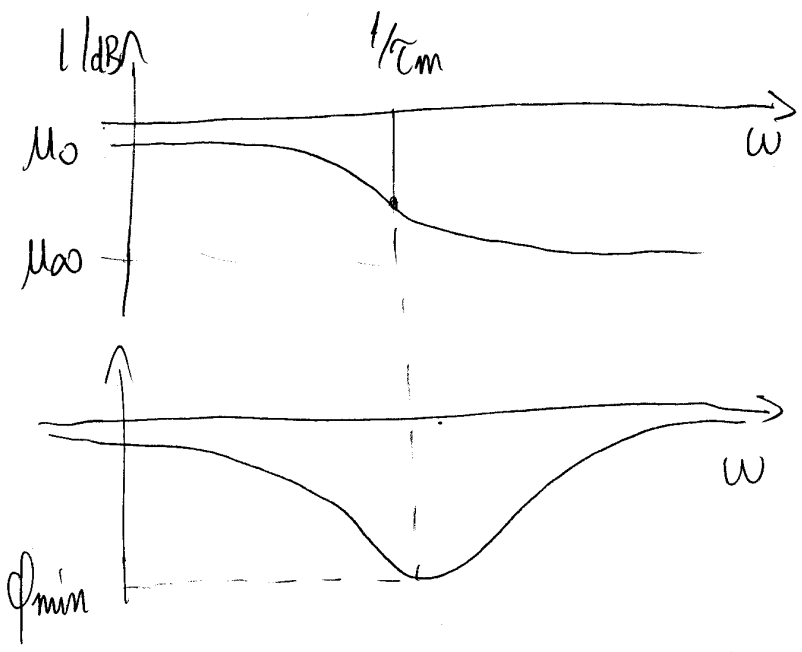
$$G'_{Ti}(j\omega) = e^{-(\tau(j\omega) + j i(j\omega))} \rightarrow |G'_{Ti}(j\omega)| = e^{-\tau(j\omega)}$$

$$\angle |G'_{Ti}(j\omega)| = -i(j\omega)$$

# SCAMBIATORI

$$|G_{T_i}(j\omega)| = e^{-\frac{\tau_i}{\tau_m}} \cdot e^{\frac{\tau_i}{\tau_m} \frac{\lambda_{im}}{1 + \omega^2 \tau_m^2}}$$

$$\angle G_{T_i}(j\omega) = -\frac{\tau_i}{\tau_m} \lambda_{im} \frac{\omega \tau_m}{1 + \omega^2 \tau_m^2}$$



$$\mu_0 = e^{-\alpha_0}$$

$$\mu_\infty = e^{-\alpha_i}$$

se  $\lambda_{im} \approx 1$

$$\phi_{min} \approx -\frac{\alpha_i}{2} \text{ [rad]}$$

- Per  $\alpha_i < 3$  può essere approssimata con  $(\phi_{min} > -90^\circ)$

$$\mu_0 \frac{1+sT_1}{1+sT_2} \quad T_1 < T_2$$

- Per  $\alpha_i > 3$  può essere approssimata con  $n$  dove  $n$  cresce al crescere di  $\alpha_i$

$$\mu_0 \left( \frac{1+sT_1}{1+sT_2} \right)^n \quad T_1 < T_2$$

- Ai fini del progetto del controllore, possiamo trascurare gli zeri che entrano in gioco a frequenza elevata. Supponiamo p.es. che  $n=4$ , per spingere  $\omega_c$  fino a  $\frac{1}{T_1}$  dovremmo mettere 4 zeri  $(1+sT_2)$  nel regolatore, il che è totalmente irrealistico in presenza di rumore

# SCAMBIATORI

(24)

= Per  $\alpha > 4$  possiamo quindi considerare una approssimazione del tipo

$$G_{Ti}'(s) = M_0 \frac{1}{(1+sT)^n} \quad n \approx \alpha_i \quad T = \frac{\tau_i}{n}$$

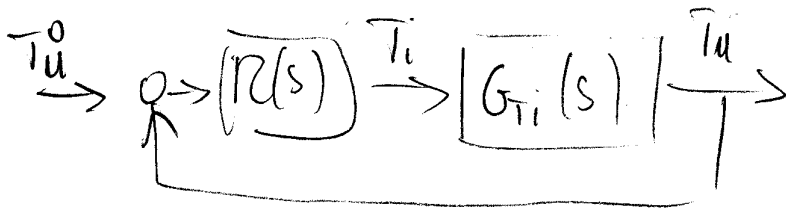
- Per  $\alpha \gg 4$  si può addirittura considerare l'approssimazione di ritardo puro

$$G_{Ti}'(s) = M_0 e^{-s\tau_i}$$

che è valida per  $\omega \ll \frac{\alpha_i}{\tau_i}$

- CONSIDERAZIONI SUL CONTROLLO

- Supponiamo di voler controllare la temperatura di uscita  $T_u$  agendo sulla temperatura d'ingresso  $T_i$



- Da un punto di vista statico, il guadagno di  $G_{Ti}$  vale

$$M_0 = G_{Ti}(0) = e^{-\alpha_0}$$

occorre quindi avere uno scambiatore "corto" (poche unità scambianti), altrimenti il guadagno di  $R(s)$  deve diventare troppo elevato, e le variazioni di  $T_i$  diventano inaccettabili



## SCAMBIATORI

25

- Da un punto di vista dinamico, abbiamo a che fare con dinamiche difficili da controllare, perché contenenti ritardi puri e/o funzioni passa-basso e molti poli
- Di norma  $\gamma_i \gg \gamma_e$ , quindi anche per scambiatori corti ( $\alpha_0$  piccolo),  $\alpha_i$  è sufficientemente elevato
- Caso (A) Scambiatore a liquido

$\pi_c > \pi_{mcm}$   $\rightarrow$  domina il ritardo dovuto al trasporto

$$G_{Ti}(s) \approx M_0 e^{-s\tau} \frac{1}{(1+sT)^n} \quad n \approx \frac{\alpha_i}{2} \quad T = \frac{\tau}{n}$$

la banda è essenzialmente limitata dallo sfasamento del ritardo puro  $\tau$

Se  $\gamma_i$  è molto elevato ( $\alpha_i \approx 20 \div 100$ ) si può approssimare  $G_{Ti}(s)$  come

$$G_{Ti}(s) \approx M_0 e^{-s(\tau + \tau^2)}$$

# SCAMBIATORI

(26)

- Caso (B) Scambiatore a vapore/gas

• Trascuriamo gli effetti della comprimibilità - i risultati sono qualitativamente analoghi

•  $\Pi_m C_m \gg \Pi_c \Rightarrow \tau^1 \gg \tilde{\tau}$  : trascuriamo  $\tilde{\tau}$

$$G_{Ti}(s) \approx \begin{cases} M_0 \frac{1+sT_1}{1+sT} & \alpha < 3 \quad (\alpha_0 \ll \alpha) \\ M_0 \frac{1}{(1+sT)^n} & \alpha_i > 3 \quad n = \frac{\alpha_i}{2} \quad T_c = \frac{\tilde{\tau}^1}{n} \\ M_0 e^{-s\tilde{\tau}^1} & \alpha_i \gg 3 \quad \text{approx BF} \end{cases}$$

• la dinamica è essenzialmente determinata dall'accumulo nel metallo  $\tau^1 = \frac{\Pi_m C_m}{\omega C}$

• Se  $\alpha < 3$  può convenire introdurre uno zero nel regolatore ( $\rightarrow$  PID) per allargare la banda

se  $\alpha \gg 3$  c'è poco da fare

- In generale, è più facile controllare scambiatori corti

di piccolo,  $\alpha_i$  piccolo

- ANALISI DINAMICA: temperatura esterna

$$T_u(s) = G_{Te}(s) T_e(s)$$

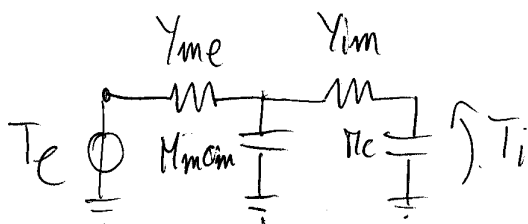
$$G_{Te}(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} (1 - e^{-\alpha(s)L})$$

$$\frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = \frac{\frac{\tilde{c}}{\tilde{c}_i} \lambda_{me} \frac{1}{1+s\tilde{c}_m}}{s\tilde{c} + \frac{\tilde{c}}{\tilde{c}_i} \frac{\lambda_{me} + s\tilde{c}_m}{1+s\tilde{c}_m}} = \frac{1}{1+s \frac{\tilde{c}_m + \tilde{c}_i}{\lambda_{me}} + s^2 \frac{\tilde{c}_m \tilde{c}_i}{\lambda_{me}}}$$

$$\lambda_{me} \ll 1 \rightarrow T_1 \approx \frac{\tilde{c}_m + \tilde{c}_i}{\lambda_{me}} \approx \frac{\pi c + \pi m c_m}{\gamma_{me}}$$

$$T_2 \approx \frac{\pi m c_m \pi c}{\pi m c_m + \pi c} \cdot \frac{1}{\gamma_{im}}$$

$\frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$  è la risposta che avrebbe la temperatura del fluido se fosse fermo; equivalente elettrico ( $V \leftrightarrow T, I \leftrightarrow Q$ )



- la risposta a scalino è quella per i primi  $\tilde{c}$  secondi, poi interviene il termine  $e^{-\alpha(s)L}$  (che contiene un ritardo puro)
- Il guadagno statico effettivo non è 1, ma vale

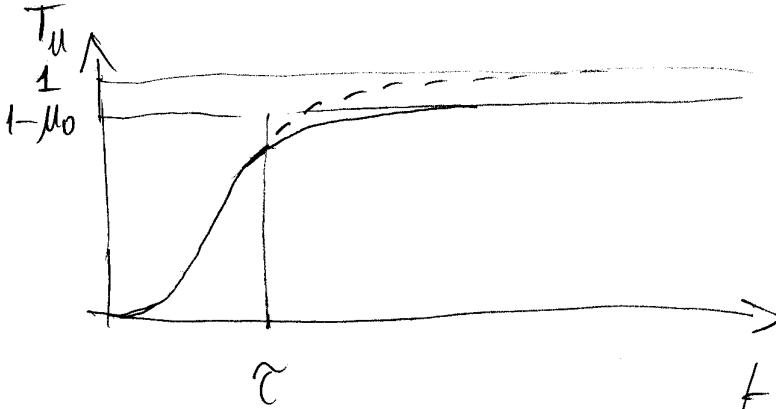
$$G_{Te}(0) = 1 - e^{\alpha(0)L} = 1 - e^{-\alpha_0 L} = 1 - \mu_0$$

# SCAMBiatori

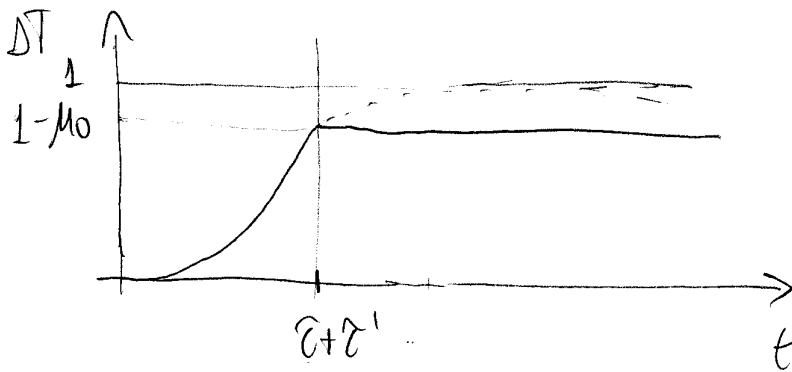
(28)

- La risposta a scalino ha quindi questo aspetto

$$T_e = sc(t)$$



- Nel caso limite  $\gamma_i \rightarrow \infty \Rightarrow t e^{-\alpha(s)L} = M_0 \cdot e^{-s(\tau+\tau')}$



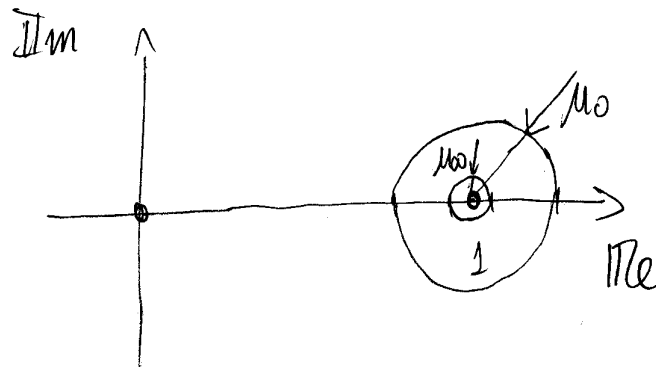
- Risposta in frequenza

• Abbiamo già analizzato lo z.i.p. di  $e^{-\alpha(s)L}$ ; si osserva che

$$e^{-\alpha_i} = M_{00} \leq |e^{-\alpha(j\omega)L}| \leq M_0 = e^{-\alpha_0}$$

• Se  $\alpha_0 > 1$ ,  $e^{-\alpha_0} \ll 1$ ; si vede quindi che

$$1 - e^{-\alpha(j\omega)L} \approx 1$$



• Pertanto  $\frac{\beta(j\omega)}{\alpha(j\omega)} (1 - e^{-\alpha(j\omega)L}) \approx \frac{\beta(j\omega)}{\alpha(j\omega)}$

- CONSIDERAZIONI SUL CONTROLLO

$$G_{Te}(s) \approx \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

se  $\gamma_i \gg \gamma_e$   $T_1 \approx \frac{\pi_m c_m + \pi_c}{\gamma_{me}}$

$$T_2 \approx \frac{\pi_m c_m \cdot \pi_c}{\pi_m c_m + \pi_c} \cdot \frac{1}{\gamma_{im}}$$

- Il controllo di  $T_m$  agendo su  $T_e$  non è critico; basta un PID, o addirittura un PI (se  $\gamma_{im}$  è elevato)

# SCAMBIATORI

(30)

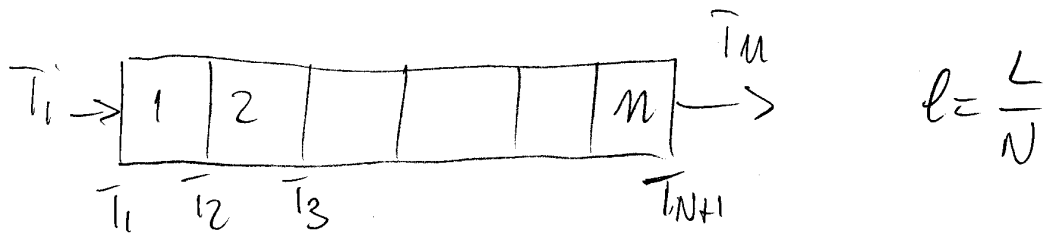
- MODELLI A PARAMETRI CONCENTRATI PER SIMULAZIONE

- la trattazione analitica è limitata a casi semplici e lineari (o linearizzati)

- In generale è possibile costruire modelli numerici approssimati (anche per grandi variazioni), impiegando un opportuno metodo di discretizzazione. Analizziamo in particolare il metodo dei volumi finiti

• Equazione energia:

$$\rho A c \frac{\partial T}{\partial t} + w c \frac{\partial T}{\partial x} = w_i \varphi_i \quad (w = w(t))$$



• Integriamo sul volume  $i$ -esimo

$$\int_{j\ell}^{(j+1)\ell} \rho A c \frac{\partial T}{\partial t} dx + \int_{j\ell}^{(j+1)\ell} w c \frac{\partial T}{\partial x} dx = \int_{j\ell}^{(j+1)\ell} w_i \varphi_i dx$$

$$\rho A l c \frac{\partial \tilde{T}_i}{\partial t} + w c (T_{j+1} - T_j) = w_i l \tilde{\varphi}_{ij}$$

• Analogamente si procede per l'equazione del metallo, ottenendo:

$$\rho_m A_m l c_m \frac{\partial \tilde{T}_m}{\partial t} = -w_i l \tilde{\varphi}_i + w_e l \tilde{\varphi}_e$$

## SCAMBIATORI

(31)

- Occorre adesso trovare delle espressioni adeguate per le variabili mediate

- Flusso termico

$$\phi_i = \gamma_i (\bar{T}_m - T)$$

è ragionevole calcolare il valore medio supponendo che  $T(x,t)$  vari linearmente tra i nodi

$$\hat{\phi}_{i,j} = \gamma_i \left( \bar{T}_{mij} - \frac{T_j + T_{j+1}}{2} \right)$$

- Temperatura fluido : abbiamo due opzioni

$$\tilde{T}_j \approx T_{j+1} \quad (\text{temp. all'uscita del volume})$$

$$\bar{T}_j \approx \frac{T_j + T_{j+1}}{2} \quad (\text{temp. media del volume})$$

• apparentemente l'ipotesi (B) è preferibile, perché più accurata (corrisponde ad una distribuzione  $T(x,t)$  lineare e tratti) - essa comporta però un problema rispetto alla simulazione nel dominio del tempo.

- Per capire cosa succede, analizziamo il caso particolare  $w = \text{cost}$ ,  $\phi_i = 0$ , concentrandoci l'attenzione sul 1° volume:

# SCAMBIATORI

(32)

(A)  $\rho A c l \frac{dT_u}{dt} + w c (T_u - T_i) = 0$ ; transf. Laplace

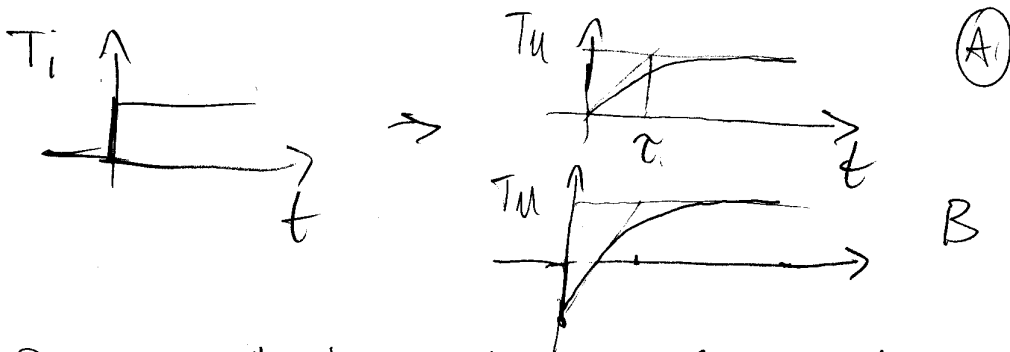
$$\left( \frac{\rho A l c}{w c} s + 1 \right) T_u = T_i \Rightarrow \frac{T_u}{T_i} = \frac{1}{1 + s \tau_2}$$

(B)  $\frac{\rho A c l}{2} \left( \frac{dT_i}{dt} + \frac{dT_u}{dt} \right) + w c (T_u - T_i) = 0$ ; transf. Laplace

$$\left( \frac{\rho A l c}{2 w c} s + 1 \right) T_u = \left( -\frac{\rho A l c}{2 w c} s + 1 \right) T_i \Rightarrow \frac{T_u}{T_i} = \frac{1 - s \tau_2 / 2}{1 + s \tau_2 / 2}$$

sappiamo che la fdt esatta vale  $\frac{T_u}{T_i} = e^{-s \tau_2}$

- L'approssimazione B è più accurata in bassa frequenza (è una Padé(1,1), rispetto alla A che è una Padé(1,0)), ma ha un comportamento in alta frequenza non realistico

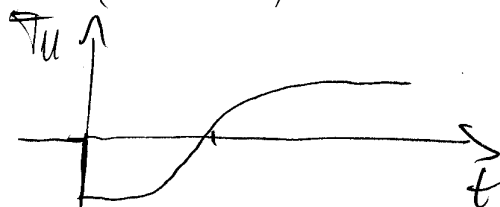
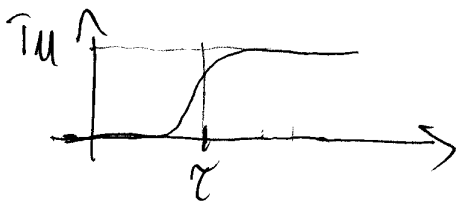


- Quando metto in cascata N volumi, ottengo

(A)  $\frac{1}{(1 + s \tau_2)^N}$

(B)  $\frac{(1 - s \tau_2 / 2)^N}{(1 + s \tau_2 / 2)^N}$

$$\tau = \tau_2 \cdot N = \frac{L}{u}$$





## SCAMBIATORI

33

- In generale, quindi, si preferisce l'approssimazione (A), che non viola il II° principio della termodinamica...

### - APPROSSIMAZIONE PER SCAMBIO INTERNO ELEVATO

- Il modello appena discusso ha  $2N$  variabili di stato ( $N$  per il fluido ed  $N$  per la parete)

- Se  $\alpha_i = \frac{\gamma_{im}}{w_c}$  è molto elevato ( $20 \div 50$ ), si può considerare

l'approssimazione  $\chi_i \rightarrow 0$ , quindi porre  $T_m = T$ , sommare le due equazioni dell'energia e discretizzare lo risultante,

ottenendo  $(\rho A_c + \rho_m A_m c_m) l \frac{d\tilde{T}_i}{dt} + w_c (\tilde{T}_{i+1} - \tilde{T}_i) = w_c l \tilde{\varphi}_e$

cioè un modello di ordine ridotto ( $N$  stati)

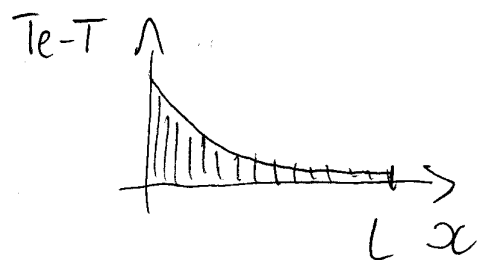
### - ACCURATEZZA STATICA

- A regime, ipotizzando per semplicità  $T_0 = 0$ , la distribuzione di temperatura del fluido vale

$$\bar{T}(x) = T_e (1 - e^{-\alpha_0 \frac{x}{L}})$$

ed ha quindi un andamento esponenziale. La potenza termica scambiata totale vale quindi

$$Q = \int_0^L \frac{1}{\frac{1}{w_c \alpha_e} + \frac{1}{w_i \alpha_i}} (T_e - \bar{T}) dx$$



## SCAMBiatori

(34)

- Il modello approssimato valuta gli scambi termici come se la temperatura fosse distribuita in modo lineare a tratti. È quindi necessario che il Numero di unità scambianti del singolo tratto non sia troppo grande, per evitare grandi errori. È quindi opportuno che sia

$$\frac{d_0}{N} < 1$$

in modo che la distribuzione su ogni tratto sia ben approssimata dalla distribuzione lineare

